LEERBOEK | WISKUNDE B | VWO DEEL 1

GETAL & RUIMTE | B

Noordhoff Uitgevers

Getal & Ruimte

vwo B deel 1

Twaalfde editie, 2020

Noordhoff Uitgevers
Groningen

Auteurs

J. H. Dijkhuis
G. de Jong
H. J. Houwing
J. D. Kuis
F. ten Klooster
S. K. A. de Waal
J. van Braak
J. M. H. Liesting-Maas
M. Wieringa
R. D. Hiele
J. E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
M. Vos
J. van Haren
B. W. van Laarhoven
R. Meijerink

Voorwoord

Aan de docent,

Het boek vwo B deel 1
Samen met de delen 2, 3 en 4 van vwo wiskunde B bevat dit boek de leerstof van het programma vwo wiskunde B, zoals dat met ingang van 2015 is vastgesteld.
De totale studielast voor het vak vwo wiskunde B is 600 uur. De delen 1, 2, 3 en 4 bevatten samen 17 hoofdstukken.
De vier hoofdstukken van dit boek hebben elk een studielast van ongeveer 30 uur.
In hoofdstuk 1 Functies en grafieken komen enkele aspecten van de subdomeinen B1 (Formules en functies), B3 (Functies en grafieken) en B5 (Vergelijkingen en ongelijkheden) aan de orde. In hoofdstuk 2 De afgeleide functie worden gedeelten van de subdomeinen C1 (Afgeleide functies) en C2 (Technieken voor differentiëren) behandeld. Het subdomein E1 (Meetkundige vaardigheden) komt in hoofdstuk 3 Meetkunde aan bod. Hoofdstuk 4 Vergelijkingen en herleidingen is gericht op de subdomeinen B4 (Inverse functies) en B5.

Beginopdrachten en eindopdrachten
Elk hoofdstuk heeft een beginopdracht en een eindopdracht. In de beginopdracht komen aspecten van het betreffende hoofdstuk aan de orde, zonder dat er een beroep wordt gedaan op technieken die in het hoofdstuk worden geleerd. In de eindopdracht zijn deze technieken meestal wel nodig. De begin- en eindopdrachten zijn geschikt voor groepswerk. In een klassengesprek kan worden gereflecteerd op de opdracht. De beginopdracht geeft de docent bovendien de mogelijkheid alvast enkele zaken van het hoofdstuk toe te lichten en de grote lijn hiervan te bespreken. De studielast van elk hoofdstuk is zodanig dat voor beide opdrachten een lesuur kan worden uitgetrokken.
De uitwerkingen van deze opdrachten staan in het docentenmateriaal.

Drie leerroutes
In deze editie wordt gewerkt met drie leerroutes: de basisroute, de middenroute en de uitdagende route. De theorie is voor alle routes gelijk. Bij de opgaven zijn de routes aangegeven met symbolen. Een gevolg van het werken met deze routes is dat leerlingen niet alle aangeboden opgaven hoeven te maken. De routes zijn zo samengesteld, dat alle leerlingen in hetzelfde tempo het hoofdstuk doorwerken. Nieuwe theorie kan dus klassikaal aan de orde komen.
De basisroute geeft de leerling voldoende oefening om zich alle vaardigheden die bij de eindtermen horen eigen te maken.
In de middenroute worden enkele oefenopgaven overgeslagen en in plaats hiervan maakt de leerling opgaven die dieper op de stof ingaan.
De uitdagende route is voor de leerlingen die de basisstof snel oppikken. Deze leerlingen maken nog minder oefenopgaven. Zo komt er tijd vrij om aan uitdagende opgaven te werken.

Om het niveau van de leerlingen in te schatten is het mogelijk om elke leerling in de middenroute te laten beginnen. Na enkele lessen kan dan duidelijk worden welke route voor een leerling de beste is. De docent kan ook de leerlingen zelf hun route laten kiezen. Het is van belang regelmatig te monitoren of de gekozen route de juiste is.

Verdere opbouw
De paragraaf Voorkennis is kort gehouden en sluit inhoudelijk meestal direct aan op de eerste paragraaf.
Gebleven zijn de oriëntatie-opgaven, de reflectie-opgaven en de afsluitende opgaven. Nieuw zijn de extra opgaven, aangegeven met E, die vooral in de uitdagende route voorkomen. Deze extra opgaven doorbreken de standaardaanpak en activeren zo het wiskundig denken. Hierbij is soms dankbaar gebruik gemaakt van Kangoeroe-opgaven en opgaven uit de Wiskunde Olympiade.
Elke paragraaf wordt afgesloten met een Terugblik, aan het eind van elk hoofdstuk staat een Diagnostische toets en achterin het boek staan de Gemengde opgaven.

Wiskundige denkactiviteiten
In de begin- en eindopdrachten wordt een denkactieve houding van de leerling verwacht. Verder spelen in de samenhang tussen de theorie en de daarop volgende opgaven wiskundige denkactiviteiten een rol. Zo zijn ten opzichte van de vorige editie enkele voorbeelden vervangen door opgaven waarin de leerling zelf tot een bepaalde aanpak komt. De verschillende aspecten van wiskundige denkactiviteiten komen eveneens voor bij oriëntatie-opgaven, die immers het denken over een nieuw wiskundig begrip activeren. Ook de reflectie-opgaven doen een beroep op het denkvermogen, bijvoorbeeld omdat ze ingaan op de aanpak van een wiskundig probleem of de samenhang tussen wiskundige begrippen. Tot slot zijn de extra opgaven bij uitstek te typeren als denkopgaven.

Getal en Ruimte online
Alle opgaven kunnen ook digitaal worden gemaakt. Daarbij krijgt de leerling zoveel mogelijk gepaste feedback. Ook kan de leerling in de digitale omgeving uitwerkingen bekijken.
Het docentenmateriaal bevat per hoofdstuk een studiewijzer waarin bovendien de routes overzichtelijk zijn weergegeven. De studiewijzer kan naar eigen inzicht worden aangepast. Verder is presentatiemateriaal aanwezig en zijn bij elk hoofdstuk toetsopgaven opgenomen. Behalve een bundel waaruit zelf een toets is samen te stellen, is ook een kant en klare toets (voor ongeveer 75 minuten) opgenomen. In het online materiaal voor de leerlingen staat bij elk hoofdstuk een oefentoets.

Zoals altijd stellen we op- en aanmerkingen van gebruikers zeer op prijs.

voorjaar 2019

Legenda

1 **Voorkennis**
Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

O2 **Oriëntatie-opgave**
Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 **Gewone opgave**
Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 **Reflectie-opgave**
In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 **Afsluitende opgave**
De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 **Extra opgave**
Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute

2 Middenroute

3 Uitdagende route

NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 **Opgaven zonder route-aanduiding**
In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[GR] Verwijzing naar een module van de handleiding GR.

[WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

[DEMO] Verwijzing naar een demo/animatie.

Inhoud

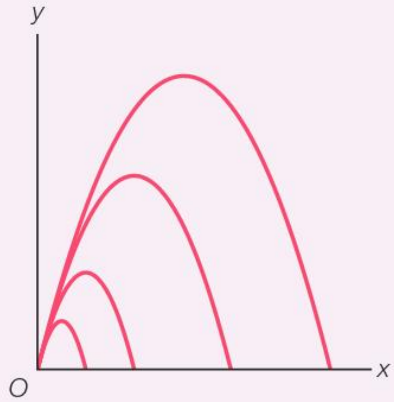
1 Functies en grafieken

Wat leer je?

- Opstellen van de formule van een lijn waarvan twee punten zijn gegeven.
- Extreme waarden berekenen bij tweedegraadsfuncties.
- Tweedegraadsvergelijkingen oplossen.
- Werken met functies en vergelijkingen met een parameter.
- De begrippen domein, bereik en modulus.
- Hoe je met de grafische rekenmachine vergelijkingen en ongelijkheden oplost en extreme waarden berekent.

Beginopdracht Waaiers parabolen

Bij het spuiten met een tuinslang, bij fonteinen en bij het blussen van een brand door de brandweer zie je waterstralen. Hoe hoog en hoe ver die komen hangt af van de druk van het water en onder welke hoek het water de spuitmond verlaat. Als we aannemen dat de waterstraal de paraboolvorm heeft, dan kunnen we bijvoorbeeld berekenen waar de toppen van de parabolen liggen als de hoek hetzelfde blijft en we de druk variëren.



Bij de volgende vragen ga je onderzoeken waar de toppen van de bergparabolen liggen die onder dezelfde hoek door de oorsprong gaan. In de figuur hiernaast zie je enkele van deze parabolen.
De algemene formule van de parabolen die onder een hoek van ongeveer 76° door de oorsprong gaan is $y = ax^2 + 4x$.

- Neem $a = -1$. Teken de parabool en geef de coördinaten van de top.
- Doe hetzelfde voor $a = -2$ en $a = -\frac{1}{2}$.
- Op welke grafiek liggen de toppen van de parabolen die je nu hebt getekend? Controleer of dit ook geldt voor een andere parabool van de vorm $y = ax^2 + 4x$.

De parabolen van de vorm $y = ax^2 + 6x$ gaan allemaal onder een hoek van ongeveer 81° door de oorsprong.

- Onderzoek op welke grafiek de toppen van deze parabolen liggen.
- Op welke grafiek liggen de toppen van de parabolen van de vorm $y = ax^2 - 3x$ denk je? Controleer je antwoord door voor a enkele waarden te nemen.

Elke parabool van de vorm $y = -x^2 + bx$ gaat door de oorsprong, waarbij de hoek waaronder de parabool door de oorsprong gaat afhangt van b.

- Onderzoek of je ook iets kunt zeggen van de toppen van de parabolen $y = -x^2 + bx$ en stel zo mogelijk de formule op van de grafiek waarop de toppen liggen.
- Doe hetzelfde voor de toppen van de parabolen $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx$.

Voorkennis Lineaire vergelijkingen en ongelijkheden

Theorie A Lineaire vergelijkingen

De vergelijking $6x - 8 = 2x - 7$ is een voorbeeld van een lineaire vergelijking. In deze vergelijking is x de variabele. Je lost zo'n vergelijking als volgt op.

$6x - 8 = 2x - 7$ Term met x naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid.
$4x = 1$ Deel linker- en rechterlid door het getal dat voor x staat.
$x = \frac{1}{4}$

Gebruik bij het oplossen van lineaire vergelijkingen het volgende werkschema.

Werkschema: lineaire vergelijkingen oplossen

1. Werk de haakjes en de breuken weg.
2. Breng alle termen met de variabele naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
3. Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat.

Bij de vergelijking $\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$ staan zowel haakjes als breuken. Je kunt eerst de haakjes wegwerken en dan de breuken, maar het kan ook andersom.

Vermenigvuldigen van $\frac{2}{3}(x - 4)$ met 15 betekent $15 \cdot \frac{2}{3}(x - 4)$ oftewel $10(x - 4)$.

Eerst de haakjes, dan de breuken

$\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$
$\frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = \frac{2}{5}x + 1$ $\times 15$
$10x - 40 = 6x + 15$
$4x = 55$
$x = 13\frac{3}{4}$

Eerst de breuken, dan de haakjes

$\frac{2}{3}(x - 4) = \frac{1}{5}(2x + 5)$ $\times 15$
$10(x - 4) = 3(2x + 5)$
$10x - 40 = 6x + 15$
$4x = 55$
$x = 13\frac{3}{4}$

Bij de vergelijking $\frac{3t - 5}{7} = t + 4\frac{1}{2}$ kun je voor $\frac{3t - 5}{7}$ schrijven $\frac{1}{7}(3t - 5)$.

1 Los op.

a $10 - 3(x + 1) = 5x - (2x - 1)$
b $\frac{4}{5}x - 1\frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}x - 3$
c $\frac{2t - 3}{4} = t - 1\frac{1}{3}$
d $1{,}6(2x - 1) = 1{,}4x - 2$
e $\frac{2}{7}(4x - 1) = \frac{3}{4}(1 - 5x)$
f $5 - \frac{3t - 1}{6} = \frac{5t + 1}{4} - \frac{2t + 3}{3}$

Theorie B Lineaire ongelijkheden

Voorbeelden van lineaire ongelijkheden zijn $2x - 1 < 5x + 3$, $6a + 5 \geq 8 - (a + 3)$ en $\frac{3}{4}p - \frac{2}{3}(p - 5) \leq p + 2$.

Denk bij het oplossen van lineaire ongelijkheden aan het omklappen van het ongelijkheidsteken in het geval je het linker- en rechterlid door een negatief getal deelt.
Zo krijg je bij het oplossen van $2x - 1 < 5x + 3$

$2x - 1 < 5x + 3$
$-3x < 4$ Omdat je beide leden door -3
$x > -1\frac{1}{3}$ deelt, klapt het teken $<$ om in $>$.

$5 < 6$
$5 + 2 < 6 + 2$
$5 - 2 < 6 - 2$
$5 \cdot 2 < 6 \cdot 2$
$5 \cdot -2 > 6 \cdot -2$
$5 : -2 > 6 : -2$

Gebruik bij het oplossen van lineaire ongelijkheden het volgende werkschema.

Werkschema: lineaire ongelijkheden oplossen
1 Werk de haakjes en de breuken weg.
2 Breng alle termen met de variabele naar het linkerlid, de rest naar het rechterlid en herleid beide leden.
3 Deel beide leden door het getal dat voor de variabele staat. Als dit getal negatief is, dan klap je het ongelijkheidsteken om.

Voorbeeld
Los op.
a $6a + 5 > 8 - (a + 3)$ **b** $\frac{3}{4}p - \frac{2}{3}(p - 5) \leq p + 2$

Uitwerking
a $6a + 5 > 8 - (a + 3)$
$6a + 5 > 8 - a - 3$
$7a > 0$
$a > 0$

Je deelt door 7, dus het teken klapt niet om.

b $\frac{3}{4}p - \frac{2}{3}(p - 5) \leq p + 2$ $\times 12$
$9p - 8(p - 5) \leq 12p + 24$
$9p - 8p + 40 \leq 12p + 24$
$-11p \leq -16$
$p \geq 1\frac{5}{11}$

Je deelt door -11, dus het teken klapt om.

2 Los op.
a $3x > 5x$
b $\frac{1}{6}x + 3 < \frac{1}{2}x - 2$
c $\dfrac{3p - 4}{3} \leq 2p - 1\frac{1}{6}$
d $1{,}5(1{,}6x - 2) < 2{,}5(1{,}4x - 3)$
e $\frac{3}{8}(5x - 2) > \frac{1}{4}(2x - 5)$
f $10 - \dfrac{2a - 3}{6} \geq \dfrac{4a - 1}{5} - \dfrac{3a + 2}{15}$

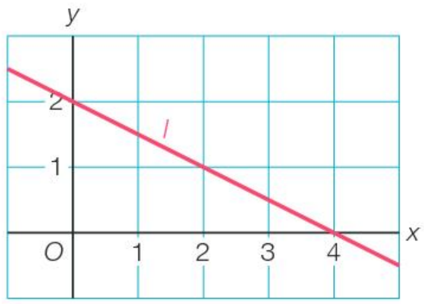
1.1 Lineaire functies

01

a Gegeven is de lijn k: $y = 2x + 3$.
Welke informatie geeft het getal 2 over de lijn k?
En het getal 3?

b In figuur 1.1 is de lijn l getekend.
Stel de formule op van l.

c Stel de formule op van de lijn m die door het punt $(0, -1)$ gaat en evenwijdig is met l in figuur 1.1.



figuur 1.1

Theorie A Functies van de vorm $f(x) = ax + b$

De algemene vorm van een **lineaire functie** f is $f(x) = ax + b$.
De grafiek van f is een rechte lijn.
De **richtingscoëfficiënt** is a en het snijpunt met de y-as is $(0, b)$.

Van de lijn l: $y = 3x + 4$ is de richtingscoëfficiënt 3.
Notatie: $rc_l = 3$.
De lijn m: $y = 3x - 2$ is **evenwijdig** met l, want deze lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt.

$rc_l = 3$ betekent:
1 naar rechts en
3 omhoog.

Is $a = 0$ dan heb je met een **constante functie** te maken.
Van de lijn n: $y = 5$ is de richtingscoëfficiënt 0.
Dus de lijn n is een **horizontale lijn**.

n: $y = 5$ oftewel
n: $y = 0x + 5$.

De formule van een functie wordt ook het **functievoorschrift** van de functie genoemd.

De lineaire functie met functievoorschrift $f(x) = ax + b$ heeft als grafiek de rechte lijn $y = ax + b$. Van deze lijn is a de richtingscoëfficiënt en $(0, b)$ het snijpunt met de y-as.

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

De lijn $y = b$ is de horizontale lijn door het punt $(0, b)$. Van een horizontale lijn is de richtingscoëfficiënt 0.

Om de formule op te stellen van de lijn k door het punt $A(18, 7)$ die evenwijdig is met de lijn m: $y = \frac{1}{2}x + 13$ stel je k: $y = ax + b$.
Omdat $k \,//\, m$ is $a = rc_k = rc_m = \frac{1}{2}$. Zo krijg je k: $y = \frac{1}{2}x + b$.
Invullen van $x = 18$ en $y = 7$ geeft $\frac{1}{2} \cdot 18 + b = 7$, dus $b = -2$.
De formule van k is dus k: $y = \frac{1}{2}x - 2$.

2

a De lijn l gaat door het punt $A(-2, 3)$ en $rc_l = -2$.
Stel de formule op van l.

b De lijn k gaat door het punt $B(-5, 21)$ en is evenwijdig met de lijn m: $y = 4x - 6$.
Stel een vergelijking op van k.

In plaats van de formule van de lijn zeggen we ook wel een vergelijking van de lijn.

3

De lijn p gaat door het punt $C(-18, 30)$ en is evenwijdig met de lijn q: $y = -\frac{1}{3}x$.

a Stel de formule op van p.

b In welk punt snijdt p de x-as? En in welk punt de y-as?

4

Gegeven is de lijn k: $y = ax + 10$.

a Voor welke a snijdt k de x-as in het punt $P(-20, 0)$?

b Voor welke a gaat k door het punt $Q(2, -4)$?

c Is er een a waarvoor k door het punt $O(0, 0)$ gaat? Licht toe.

5

a De lijn k gaat door het punt $A(4, 3)$ en is evenwijdig met de lijn l: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.
Stel de formule op van k.

b De lijn m: $y = ax + 3$ gaat door het punt $B(-4, 2)$.
Bereken a.

c De lijn n: $y = 2\frac{1}{2}x + b$ snijdt de x-as in hetzelfde punt als de lijn p: $y = -1\frac{1}{2}x + 6$.
Bereken b.

6

Gegeven zijn de lijnen k: $y = \frac{1}{2}x + 2$, l: $y = ax - 4$ en m: $y = -2x + b$.

a Voor welke b ligt het punt $P(-8, 0)$ op m?

b Voor welke a en b zijn l en m evenwijdig en ligt het punt $Q(10, 7)$ op m?

c Voor welke a en b gaan alle drie de lijnen door het punt $R(8, 6)$?

d Voor welke a en b snijden k, l en m elkaar in hetzelfde punt op de x-as?

7

Gegeven zijn de lijnen k: $y = ax + 1$ en l: $y = 2ax - 2a$. Alle lijnen k gaan door het punt A en alle lijnen l gaan door het punt B.

a Geef de coördinaten van A en B.

b Voor welke a snijden k en l elkaar in het punt A? En voor welke a in het punt B?

c Voor welke a snijden k en l elkaar in het punt C met $x_C = 10$?
Wat is de y-coördinaat van C?

A8 Baarzen kunnen leven in water waarvan de temperatuur maximaal 25 °C is. Bovendien hebben ze minstens 2 mg zuurstof per liter water nodig. We bekijken in deze opgave baarzen die leven in een meer waarvan de diepte 4 meter is.
In het begin van een lange hete zomer is op 1 juli de temperatuur van het water alleen aan de oppervlakte 25 °C. Gedurende de zomer komt de diepte waarop de temperatuur 25 °C is elke drie dagen 10 cm lager te liggen.
Op 1 juli is overal in het meer voldoende zuurstof aanwezig. Vanaf dat moment ontwikkelt zich door rotting van organismen op de bodem een steeds dikkere laag met te weinig zuurstof. Deze laag neemt vanaf 1 juli elke dag met 5 cm toe.
In deze opgave is d_T de diepte waaronder het koud genoeg is voor de baarzen en d_Z de diepte waarboven er voldoende zuurstof voor de baarzen is. Neem t in dagen met $t = 0$ op 1 juli en de diepte d in meter. Aan het wateroppervlak is dus $d = 0$ en op de bodem van het meer is $d = 4$.

a Stel de formule op van d_T na t dagen.
b Stel de formule op van d_Z na t dagen.
c Teken de grafieken bij de formules van de vragen a en b voor de periode van 1 juli tot en met 31 augustus en onderzoek met behulp van deze grafieken vanaf welke datum de baarzen niet meer in het meer kunnen leven.

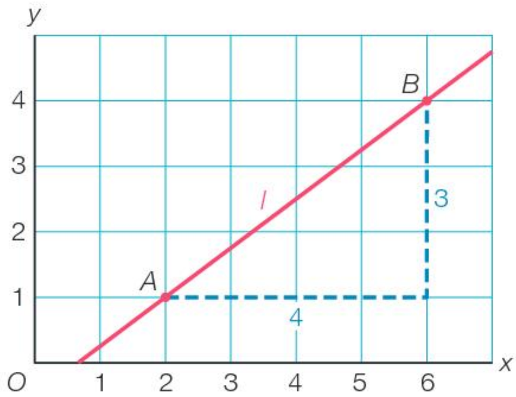
$t = 0$ is op 1 juli.
$t = 30$ is op 31 juli.
$t = 31$ is op 1 augustus.
$t = 61$ is op 31 augustus.

E9 Als 20 mensen samen een rekening betalen en ieder betaalt hetzelfde bedrag, dan betalen ze samen 3 euro te veel. Als 21 mensen dezelfde rekening betalen en ieder betaalt 3 euro minder, dan betalen ze samen 10 euro te veel.
Wat is het bedrag van de rekening?

010 De lijn l gaat door de punten $A(2, 1)$ en $B(6, 4)$. Zie figuur 1.2.

a Voor de lijn l geldt:
ga je 4 naar rechts, dan ga je 3 omhoog, dus ga je 1 naar rechts, dan ga je ... omhoog.
Dus $rc_l = ...$

b In figuur 1.2 zie je $x_B - x_A = 6 - 2 = 4$ en $y_B - y_A = 4 - 1 = 3$.
Hoe kun je met $x_B - x_A$ en $y_B - y_A$ de richtingscoëfficiënt van l berekenen?



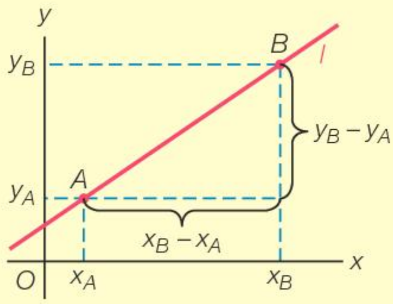
figuur 1.2 Met de coördinaten van de punten A en B kun je rc_l berekenen.

Theorie B Een lijn door twee gegeven punten

Bij de opgaven die hierna komen heb je regelmatig je rekenmachine nodig. We gaan ervan uit dat je over een grafische rekenmachine (GR) beschikt. Om hiermee te leren werken, neem je af en toe een module uit de handleiding GR door. Deze handleiding vind je in *Getal&Ruimte online*.

[▸ GR] Neem de module **Berekeningen op het basisscherm** door.

Van een lijn l waarvan de coördinaten van twee punten bekend zijn, is de richtingscoëfficiënt als volgt te berekenen.
Voor de lijn l in figuur 1.3 geldt:
ga je $x_B - x_A$ naar rechts, dan ga je $y_B - y_A$ omhoog,
dus ga je 1 naar rechts, dan ga je $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ omhoog.

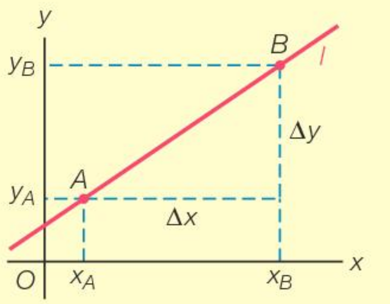


figuur 1.3

Dus $rc_l = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
Voor $y_B - y_A$ schrijven we Δy, dus $\Delta y = y_B - y_A$.
Voor $x_B - x_A$ schrijven we Δx, dus $\Delta x = x_B - x_A$.

Δ is de Griekse hoofdletter D. Je spreekt Δ uit als *delta*.
D is de eerste letter van *differentie*, dat verschil betekent.

De richtingscoëfficiënt van de lijn door de punten A en B is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.



figuur 1.4

Voorbeeld
Stel een vergelijking op van de lijn l door de punten $A(2, -1)$ en $B(6, 5)$.

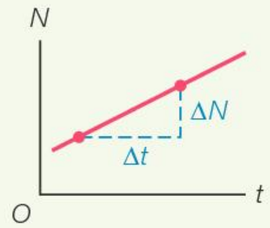
Uitwerking
Stel l: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{5 - -1}{6 - 2} = 1\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(2, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -1 \\ 3 + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$$

Dus l: $y = 1\frac{1}{2}x - 4$.

Bij toepassingen worden meestal andere letters dan x en y gebruikt.
In de formule $N = at + b$ is N **uitgedrukt in** t.
De formule geeft een **lineair verband** tussen N en t.
We zeggen ook wel N is een **lineaire functie van** t.

Zijn bij twee waarden van t de bijbehorende waarden van N gegeven, dan kun je de formule van N als functie van t opstellen.



$$\text{rc} = \frac{\text{verticale toename}}{\text{horizontale toename}}$$

Is N een lineaire functie van t, dan is $N = at + b$ met $a = \dfrac{\Delta N}{\Delta t}$.

Bij $y = ax + b$ is
- y een functie van x
- y uitgedrukt in x.

Voorbeeld
Een auto begint op $t = 0$ te remmen waarbij de snelheid lineair afneemt.
Op $t = 2$ is de snelheid 90 km/uur, drie seconden later is de snelheid 45 km/uur.
Druk de snelheid v in km/uur uit in de tijd t in seconden.

Uitwerking
Stel $v = at + b$.

$$\left.\begin{array}{l} t = 2 \text{ en } v = 90 \\ t = 5 \text{ en } v = 45 \end{array}\right\} a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{45 - 90}{5 - 2} = -15$$

$$\left.\begin{array}{l} v = -15t + b \\ t = 2 \text{ en } v = 90 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -15 \cdot 2 + b = 90 \\ -30 + b = 90 \\ b = 120 \end{array}$$

Dus $v = -15t + 120$.

R11 Zie het eerste voorbeeld op de vorige bladzijde.

a Lotte neemt $\Delta y = -1 - 5$.
Welke Δx hoort daarbij? Krijgt ze ook $\text{rc}_l = 1\frac{1}{2}$?

b Lars gebruikt de coördinaten van het punt B om b te berekenen in $y = 1\frac{1}{2}x + b$.
Welke berekening hoort daarbij?

Zie het tweede voorbeeld.

c Na hoeveel seconden staat de auto stil?

12 Stel een vergelijking op van de lijn

a l door de punten $A(-1, 1)$ en $B(1, 4)$

b k door de punten $C(-3, 5)$ en $D(2, 0)$

c m door de punten $E(5, 3)$ en $F(-7, 3)$

d n door de punten $G(180, 360)$ en $H(160, 250)$.

13

a K is een lineaire functie van m.
Voor $m = 5$ is $K = 10$ en voor $m = 12$ is $K = 115$.
Schrijf K als functie van m.

b F is een lineaire functie van R.
Voor $R = 15$ is $F = 300$ en voor $R = 42$ is $F = 138$.
Druk F uit in R.

c In een assenstelsel met een horizontale n-as en een verticale g-as is de lijn door de punten $(6, 35)$ en $(10, 49)$ getekend.
Stel de formule op van deze lijn.

14 Tussen p en q bestaat een lineair verband.
Bij $q = 150$ hoort $p = 7{,}75$ en bij $q = 425$ hoort $p = 2{,}25$.

a Druk p uit in q.

b Om q uit te drukken in p kun je op twee manieren te werk gaan:
1 Gebruik het antwoord van vraag a.
2 Begin als volgt: $q = ap + b$ met $a = \dfrac{\Delta q}{\Delta p}$.
Werk beide manieren uit.

c Bereken p voor $q = 250$ en bereken q voor $p = 4{,}25$.

15

a De lijn k gaat door de punten $A(8, 8)$ en $B(20, 11)$ en de lijn l gaat door de punten $C(2, 14)$ en $D(50, -10)$.
Stel van de lijnen k en l de formule op en bereken de coördinaten van het snijpunt E van deze lijnen.

b Tussen M en N bestaat een lineair verband.
Voor $M = 5$ is $N = 62$ en voor $M = 20$ is $N = 86$.
Druk N uit in M en druk M uit in N.

A16 Een auto rijdt met constante snelheid. Om 14:12 uur passeert de auto hectometerpaal 164,0 en om 20 seconden na 14:15 uur paal 158,0.
Tussen het getal h op de hectometerpalen en de tijd t in minuten bestaat een lineair verband. Neem $t = 0$ om 14:00 uur.

a Stel de formule op van h als functie van t.
b Hoe laat passeert de auto hectometerpaal 149,0?

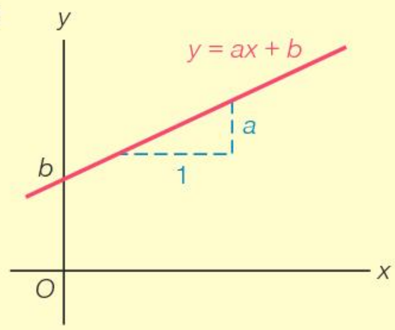
A17 Onderzoek of elke lijn door de punten $A(p, p + 1)$ en $B(2p, p + 2)$ met $p \neq 0$ de negatieve x-as snijdt.

E18 Een koudwaterkraan, geheel geopend, vult een vat in 10 minuten. Een warmwaterkraan, ook geheel geopend, vult hetzelfde vat in 12 minuten. Een stop in de bodem van het vat zorgt ervoor dat het vat niet leegloopt. Als de stop er uit is, loopt een vol vat in 20 minuten helemaal leeg.
Als nu bij een leeg vat beide kranen geheel opengezet worden en ook de stop uit de bodem getrokken wordt, hoeveel minuten duurt het dan tot het vat vol is?

Terugblik

Functies van de vorm $f(x) = ax + b$

Bij een lineaire functie f hoort een functievoorschrift van de vorm $f(x) = ax + b$.
De grafiek is een rechte lijn met richtingscoëfficiënt a.
rc = a betekent 1 naar rechts en a omhoog.



De lijn $y = ax + b$ snijdt de y-as in het punt $(0, b)$.

Lijnen met dezelfde richtingscoëfficiënt zijn evenwijdig.

De lijn k: $y = 4$ is de horizontale lijn door het punt $(0, 4)$.
Van een horizontale lijn is rc = 0.

Het opstellen van de formule van een lijn

Van de lijn m door $B(-1, 4)$ en $C(5, -8)$ krijg je de formule als volgt.

Stel m: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{-8 - 4}{5 - -1} = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } B(-1, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot -1 + b = 4 \\ 2 + b = 4 \\ b = 2 \end{array}$$

Dus m: $y = -2x + 2$.

Bij toepassingen komen andere letters dan x en y voor.
Is v een lineaire functie van t, hoort $v = 20$ bij $t = 3$ en hoort $v = 12$ bij $t = 13$, dan krijg je de formule van v als volgt.

Stel $v = at + b$ met $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{12 - 20}{13 - 3} = \dfrac{-8}{10} = -0{,}8$.

$$\left.\begin{array}{l} v = -0{,}8t + b \\ \text{bij } t = 3 \text{ hoort } v = 20 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -0{,}8 \cdot 3 + b = 20 \\ -2{,}4 + b = 20 \\ b = 22{,}4 \end{array}$$

Dus $v = -0{,}8t + 22{,}4$.

1.2 Tweedegraadsfuncties en tweedegraadsvergelijkingen

019 Gegeven is de functie $f(x) = ax^2 + bx$ met $a \neq 0$.

a Los op $f(x) = 0$ en licht toe dat hieruit voor de grafiek van f volgt $x_{top} = -\frac{b}{2a}$.

b Licht toe dat ook voor de grafiek van de functie $g(x) = ax^2 + bx + c$ geldt $x_{top} = -\frac{b}{2a}$.

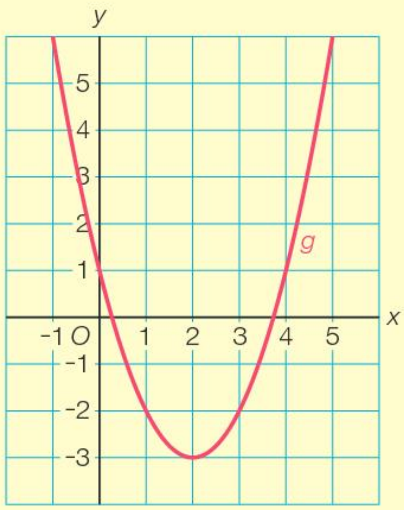
Theorie A Extreme waarden

De algemene vorm van een **kwadratische functie**, oftewel **tweedegraadsfunctie** f is $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$.
De grafiek is een **parabool**.
Voor $a > 0$ is de grafiek een **dalparabool** en voor $a < 0$ is de grafiek een **bergparabool**.
Van de grafiek van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ met $a \neq 0$ is de x-coördinaat van de top te berekenen met de formule $x_{top} = -\frac{b}{2a}$.

Van de grafiek van de tweedegraadsfunctie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is $x_{top} = -\frac{b}{2a}$. Verder is $y_{top} = f(x_{top})$.

Bij de functie $g(x) = x^2 - 4x + 1$ krijg je
$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ en
$y_{top} = g(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3$. Zie figuur 1.5.

Omdat −3 de kleinste functiewaarde is van g zeggen we: het **minimum** van g is −3.
Notatie: min. is $g(2) = -3$.
Bij een bergparabool is er sprake van een **maximum**.
Maxima en minima heten **extreme waarden** of kortweg **extremen**.



figuur 1.5

Voorbeeld

Bereken de extreme waarde van de functie $f(x) = -0{,}6x^2 + 2{,}4x - 1$.

Uitwerking

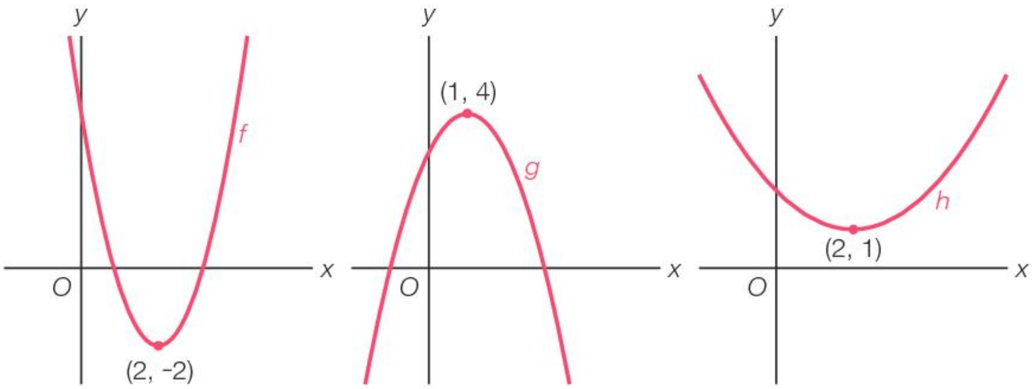
$x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2{,}4}{-1{,}2} = 2$ geeft

$y_{top} = -0{,}6 \cdot 2^2 + 2{,}4 \cdot 2 - 1 = 1{,}4$

$-0{,}6 < 0$, dus bergparabool en max. is $f(2) = 1{,}4$.

Een maximum is een grootste functiewaarde, dus het maximum is een y-coördinaat.

20 In figuur 1.6 zijn de grafieken van de functies f, g en h getekend.
De coördinaten van de toppen staan in de figuur.
De extreme waarde van f noteer je als min. is $f(2) = -2$.
Geef de extreme waarden van g en h.



figuur 1.6

21 Bereken de extreme waarde.

a $f(x) = x^2 - 4x + 1$

b $g(x) = 2x^2 + 6x + 3$

c $h(x) = -0{,}3x^2 + 6x - 2$

d $k(x) = 4x^2 + 14x$

A22
a De top van de grafiek van $f(x) = 0{,}15x^2 - 1{,}2x + 5$ ligt op de lijn k: $y = 3x + b$.
Bereken b.

b De top van de grafiek van $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x + c$ ligt op de lijn l: $y = 1\frac{1}{2}x + 4$.
Bereken c.

E23 In een autorace rijden de auto's elk met een constante snelheid. Ze vertrekken om het uur van dezelfde startplaats. De eerste auto rijdt met een snelheid van 50 km/uur. De tweede auto vertrekt een uur later met een snelheid van 51 km/uur. De derde auto vertrekt weer een uur later met een snelheid van 52 km/uur. Zo gaat het door. De laatste auto vertrekt 50 uur na de eerste met een snelheid van 100 km/uur.
Wat is de snelheid van de auto die op kop ligt 100 uur na de start van de eerste auto?

O24 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 8x + 15$.

a Toon aan dat $f(3) = f(5) = 0$.

b Welke oplossingen heeft de vergelijking $x^2 - 8x + 15 = 0$?

Bij aantonen geef je een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.
Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

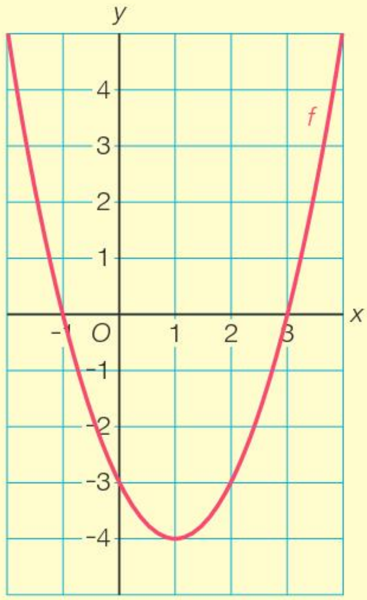
O25 **a** Het oplossen van de vergelijking $4x^2 - 25x = 0$ gaat anders dan het oplossen van de vergelijking $4x^2 - 25 = 0$.
Licht dit toe.

b Licht toe dat de vergelijking $4x^2 + 25 = 0$ geen oplossingen heeft.

c Licht toe dat het oplossen van de vergelijking $x(x + 2) = 0$ anders gaat dan het oplossen van de vergelijking $x(x + 2) = 8$.

Theorie B Typen tweedegraadsvergelijkingen

Hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
De grafiek snijdt de x-as in de punten $(-1, 0)$ en $(3, 0)$.
Dat betekent dat $f(-1) = f(3) = 0$.
De getallen -1 en 3 heten de **nulpunten** van de functie f.



figuur 1.7

Een nulpunt van een functie f is een x-waarde waarvoor geldt $f(x) = 0$.

Een nulpunt is geen punt maar een getal.

Om de nulpunten van de functie $f(x) = x^2 - 2x - 3$ te berekenen, los je vergelijking $x^2 - 2x - 3 = 0$ op. Het oplossen van deze **kwadratische vergelijking** gaat met behulp van **ontbinden in factoren**.

Je krijgt $x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x + 1)(x - 3) = 0$
$x = -1 \vee x = 3$

Dus de nulpunten zijn -1 en 3.

De algemene vorm van een kwadratische vergelijking, oftewel **tweedegraadsvergelijking** is $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$. Bij het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen kun je gebruik maken van het schema op de volgende bladzijde. In het schema wordt onderscheid gemaakt tussen vergelijkingen met twee en met drie termen.

Bij tweedegraadsvergelijkingen met drie termen gebruik je soms de ***abc*-formule**.

De *abc*-formule

$ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$ geeft $x = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ met $D = b^2 - 4ac$.

Bij de *abc*-formule is aan de **discriminant** D te zien hoeveel oplossingen er zijn:
voor $D > 0$ zijn er twee oplossingen
voor $D = 0$ is er één oplossing
voor $D < 0$ zijn er geen oplossingen.

Het oplossen van tweedegraadsvergelijkingen

Twee termen	
$\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ *Aanpak*: breng x buiten haakjes. **a** $5x^2 - 7x = 0$ $x(5x - 7) = 0$ $x = 0 \vee 5x = 7$ $x = 0 \vee x = 1\frac{2}{5}$ **b** $3x = x^2$ $3x - x^2 = 0$ $x(3 - x) = 0$ $x = 0 \vee x = 3$	$\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ *Aanpak*: herleid tot de vorm $x^2 =$ getal. **a** $3x^2 - 30 = 0$ $3x^2 = 30$ $x^2 = 10$ $x = \sqrt{10} \vee x = -\sqrt{10}$ **b** $4x^2 + 40 = 0$ $4x^2 = -40$ $x^2 = -10$ geen oplossing
Drie termen $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$	
Het linkerlid is te ontbinden *Aanpak*: Gebruik de product-som-methode. **a** $x^2 - 6x - 7 = 0$ $(x + 1)(x - 7) = 0$ $x = -1 \vee x = 7$ **b** $x^2 = x + 6$ $x^2 - x - 6 = 0$ $(x + 2)(x - 3) = 0$ $x = -2 \vee x = 3$	Het linkerlid is niet te ontbinden *Aanpak*: gebruik de *abc*-formule of ga kwadraatafsplitsen. **a** $2x^2 - 5x - 7 = 0$ $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -7 = 81$ $x = \dfrac{5 + 9}{4} = 3\frac{1}{2} \vee x = \dfrac{5 - 9}{4} = -1$ **b** $x^2 + 8x + 2 = 0$ $(x + 4)^2 - 16 + 2 = 0$ $(x + 4)^2 = 14$ $x + 4 = \sqrt{14} \vee x + 4 = -\sqrt{14}$ $x = -4 + \sqrt{14} \vee x = -4 - \sqrt{14}$

Het stap voor stap oplossen van een vergelijking, zoals in het schema hierboven is gedaan, heet **algebraïsch oplossen**.
De opdracht **bereken exact de oplossingen** betekent dat je langs algebraïsche weg de oplossingen berekent en deze niet benadert.
Je laat dus oplossingen als $x = \sqrt{3}$ en $x = \frac{1}{7}$ staan.

Bij $x = \dfrac{2 - \sqrt{7}}{6}$ krijg je $x = \frac{1}{6}(2 - \sqrt{7}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{7}$.

Oplossingen als $x = \frac{18}{12}$ en $x = \frac{2 - \sqrt{36}}{4}$ vereenvoudig je.

Dus $x = \frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$ en $x = \frac{2 - \sqrt{36}}{4} = \frac{2 - 6}{4} = -1$.

Door bij de oplossing $x = \frac{8 - \sqrt{48}}{4}$ een **factor voor het wortelteken te brengen**, krijg je

$x = \frac{8 - \sqrt{48}}{4} = \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$.

Denk er dus aan om bij wortels een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken te brengen.

Breng een zo groot mogelijke factor voor het wortelteken, dus $\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$, maar niet $\sqrt{48} = 2\sqrt{12}$.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $(2x + 1)^2 = 25$

b $4x^2 = 6x - 2$

c $3x^2 - 6 = 3x$

d $x^2 - 3 = 4x$

Uitwerking

a $(2x + 1)^2 = 25$
$2x + 1 = 5 \vee 2x + 1 = -5$
$2x = 4 \vee 2x = -6$
$x = 2 \vee x = -3$

b $4x^2 = 6x - 2$
$4x^2 - 6x + 2 = 0$
$2x^2 - 3x + 1 = 0$
$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$
$x = \frac{3 + 1}{4} = 1 \vee x = \frac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2}$

c $3x^2 - 6 = 3x$
$3x^2 - 3x - 6 = 0$
$x^2 - x - 2 = 0$
$(x + 1)(x - 2) = 0$
$x = -1 \vee x = 2$

d $x^2 - 3 = 4x$
$x^2 - 4x - 3 = 0$
$(x - 2)^2 - 4 - 3 = 0$
$(x - 2)^2 = 7$
$x - 2 = \sqrt{7} \vee x - 2 = -\sqrt{7}$
$x = 2 + \sqrt{7} \vee x = 2 - \sqrt{7}$

Probeer bij een tweedegraadsvergelijking met drie termen eerst te ontbinden in factoren. Lukt dat niet, gebruik dan pas de *abc*-formule of kwadraatafsplitsen.

R26

a Volgens Julia kun je de vergelijking $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ook oplossen door $2x^2 - 3x + 1$ te ontbinden in factoren.
Welke ontbinding bedoelt Julia?

b In voorbeeld d is de vergelijking opgelost met kwadraatafsplitsen.
Los deze vergelijking op met de *abc*-formule.

27 In deze opgave ga je de *abc*-formule bewijzen. Dat gaat met behulp van kwadraatafsplitsen. Je begint met $ax^2 + bx + c = 0$. Links en rechts delen door a geeft

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Vervolgens krijg je

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$.

a Licht de laatste stap toe.
b Maak het bewijs af.

Bij een bewijs geef je een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.

28 Bereken exact de oplossingen.

a $(3x - 2)^2 = 36$
b $(4 - \frac{1}{2}x)^2 = 9$
c $x^2 + 6 = 5x$
d $x(x - 1) = 12$
e $2x^2 = 5x$
f $x^2 + 4 = 1$

29 Los algebraïsch op.

a $3x^2 - 6x = 24$
b $3x^2 - 6x = -3(x - 6)$
c $2x^2 - 3x = 2$
d $\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0$
e $x^2 - 3x = 5(x - 3)$
f $2x^2 - 5x = 3x$

30 Bereken exact de oplossingen.

a $6 - x^2 = -2$
b $2x^2 = 9x + 5$
c $3(x + 2)^2 + 5 = 80$
d $\frac{1}{2}(x - 3)^2 - 3 = 5$
e $-(2x - 1)^2 + 5 = 1$
f $8 - 3(4x - 5)^2 = 5$

31 Bereken exact de oplossingen.

a $x^2 - 5x = 0$
b $x^2 - 5x = 14$
c $x^2 - 5 = 14$
d $x^2 - 5 = 14x$
e $(2x - 1)(3x + 6) = 0$
f $(2x - 1)(3x + 6) = 9x$
g $3x(2x - 1) = 6$
h $3x(2x - 1) = 6 - 9x$

A32 Bereken exact de oplossingen.

a $(x + 3)^2 = 16x$
b $(2x + 3)^2 = -16$
c $2(x + 3)^2 = -4x$
d $(2x + 3)(4 - x) = 9$
e $(-4x + 3)^2 = 36$
f $-4(x + 3)^2 = 4x$
g $x^2 - (x + 1)^2 = (x + 3)^2$
h $(x + 3)^2 + (x + 2)^2 = 25$

A33 Los algebraïsch op.

a $2x^2 - 13x = 3(x - 10)$
b $3x^2 + 2x + 7 = 7(x + 1)$
c $100(x^2 - 1) = 525$
d $2(x - 3)^2 = 3x - 10$
e $5(4x - 1)(6x - 5) = 0$
f $\frac{1}{4}(2x - 3)^2 - 3 = 1$

A34 ✱ Gegeven zijn de functies $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$ en $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a Bereken de nulpunten van f, g en h.

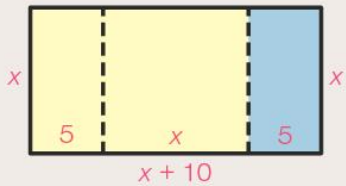
b Onderzoek of de top van de grafiek van h op de grafiek van f ligt.

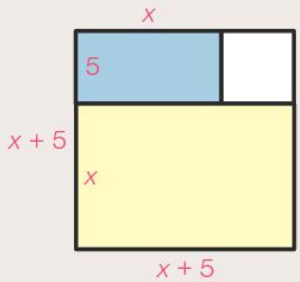
c Verder is gegeven de functie $k(x) = -\frac{1}{4}x + b$.
De top van de grafiek van de functie $l(x) = f(x) \cdot k(x)$ ligt op de grafiek van k.
Bereken b.

GESCHIEDENIS

Babylonisch rekenen

Ruim 5000 jaar geleden losten de Babyloniërs reeds kwadratische vergelijkingen op. Deze vergelijkingen stonden op kleitabletten en werden gesteld in de vorm van een raadsel. Wat opvalt is dat de Babyloniërs geen problemen hadden met het optellen van lengten en oppervlakten.
Voorbeeld: Wat is de zijde van een vierkant waarvan de oppervlakte vermeerderd met tien zijden gelijk is aan dertig eenheden?
Om deze zijde te berekenen, moet de vergelijking $x^2 + 10x = 30$ worden opgelost. De Babyloniërs losten dit vraagstuk op met behulp van de figuur hiernaast. In onze notatie ziet de berekening er als volgt uit.





$x(x + 10) = 30$
$(x + 5)^2 = 30 + 5^2$
$x + 5 = \sqrt{55}$, dus $x = \sqrt{55} - 5$.
Je kunt dus zeggen dat de Babyloniërs de volgende elegante versie van de *abc*-formule gebruikten:

$x^2 + bx = c$ geeft $x = \sqrt{c + (\frac{1}{2}b)^2} - \frac{1}{2}b$.

E35 ✱ Zie het geschiedeniskader over het Babylonisch rekenen.

a Los op deze manier de vergelijkingen $x^2 + 8x = 20$ en $x^2 + 18x = 20$ op.

b Laat zien hoe met behulp van de *abc*-formule uit $x^2 + bx = c$ de oplossing $x = \sqrt{c + (\frac{1}{2}b)^2} - \frac{1}{2}b$ is af te leiden.

c Uit $x^2 + bx = c$ is met behulp van kwadraatafsplitsen de oplossing $x = \sqrt{c + (\frac{1}{2}b)^2} - \frac{1}{2}b$ af te leiden.
Toon dit aan.

Terugblik

Extreme waarden

De grafiek van een kwadratische functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is een parabool.
Voor $a < 0$ is de grafiek een bergparabool.
Voor $a > 0$ is de grafiek een dalparabool.
De functie $f(x) = 2x^2 - 6x + 7$ heeft een minimum.
Met de formule $x_{top} = -\frac{b}{2a}$ krijg je $x_{top} = -\frac{-6}{4} = 1\frac{1}{2}$, dus $y_{top} = f(1\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2}$.
Dus het minimum van f is $2\frac{1}{2}$ voor $x = 1\frac{1}{2}$. Notatie: min. is $f(1\frac{1}{2}) = 2\frac{1}{2}$.
Maxima en minima heten extreme waarden.

Typen tweedegraadsvergelijkingen

De algemene vorm van een tweedegraadsvergelijking is $ax^2 + bx + c = 0$ met $a \neq 0$.
Deze vergelijkingen moet je algebraïsch, dat wil zeggen stap voor stap, kunnen oplossen.

Overzicht tweedegraadsvergelijkingen

Twee termen	
$\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ Breng x buiten haakjes. $3x^2 - 7x = 0$ $x(3x - 7) = 0$ $x = 0 \vee 3x = 7$ $x = 0 \vee x = 2\frac{1}{3}$	$\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ Herleid tot de vorm $x^2 = \text{getal}$. $3x^2 - 75 = 0$ $3x^2 = 75$ $x^2 = 25$ $x = 5 \vee x = -5$
Drie termen $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$	
Het linkerlid is te ontbinden. Gebruik de product-som-methode. $x^2 - 5x - 14 = 0$ $(x + 2)(x - 7) = 0$ $x = -2 \vee x = 7$	Het linkerlid is niet te ontbinden. Gebruik de *abc*-formule of ga kwadraatafsplitsen. $3x^2 - 2x - 2 = 0$ $D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -2 = 28$, dus $\sqrt{D} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ $x = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7} \vee x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{7}$

Als er exacte oplossingen worden gevraagd, dan ga je algebraïsch te werk en benader je de oplossingen niet.

Nulpunten

Een nulpunt van een functie f is een x-waarde waarvoor geldt $f(x) = 0$.
Zo heeft de functie $f(x) = (x - 3)(x - 5)$ de nulpunten 3 en 5.

1.3 Werken met parameters

036 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 6x + p$.

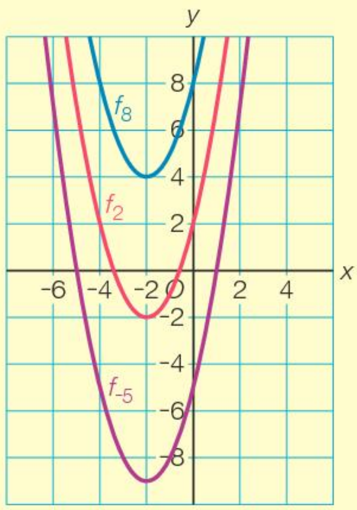
a Neem $p = 1$ en bereken de coördinaten van de top van de grafiek van de functie die je krijgt.

b Neem $p = -9$ en toon aan dat de top van de grafiek van de functie die je krijgt op de x-as ligt.

Theorie A Discriminanten met een parameter

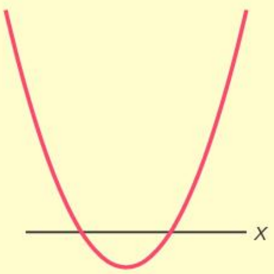
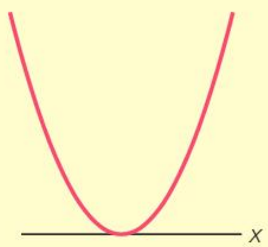
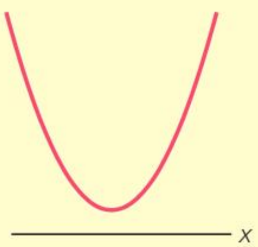
Omdat je bij $f(x) = x^2 + 4x + p$ voor elke waarde van p een andere functie krijgt, heb je met oneindig veel functies te maken. In dit functievoorschrift heet p een **parameter**.
We schrijven in het vervolg $f_p(x) = x^2 + 4x + p$.
Zo krijg je voor $p = 2$ de functie $f_2(x) = x^2 + 4x + 2$, voor $p = 8$ de functie $f_8(x) = x^2 + 4x + 8$ en voor $p = -5$ de functie $f_{-5}(x) = x^2 + 4x - 5$. In figuur 1.8 zie je de grafieken van deze drie functies.
De ligging van de grafiek van $f_p(x) = x^2 + 4x + p$ ten opzichte van de x-as hangt af van p. Je kunt je bijvoorbeeld afvragen voor welke waarden van p de grafiek geen snijpunten met de x-as heeft.
Om deze vraag te beantwoorden is het schema hieronder van belang. Hierin is te zien hoe de ligging van een dalparabool $y = ax^2 + bx + c$ ten opzichte van de x-as afhangt van de discriminant $D = b^2 - 4ac$.

Een parameter is een hulpvariabele. De parameter p helpt je als het ware oneindig veel functies kort te noteren. Parameter spreek je uit met de klemtoon op de tweede lettergreep.



figuur 1.8

De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ met $a > 0$

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
twee snijpunten met de x-as	één snijpunt (raakpunt) met de x-as	geen snijpunt met de x-as
		

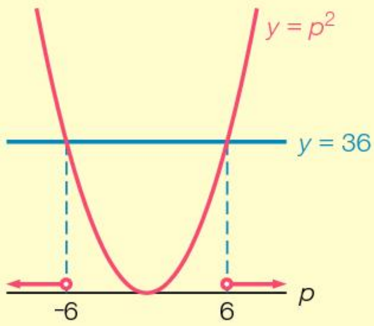
De grafiek van $f_p(x) = x^2 + 4x + p$ heeft geen snijpunten met de x-as als $D < 0$.
Omdat $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 16 - 4p$ krijg je $16 - 4p < 0$

$$-4p < -16$$
$$p > 4$$

Deel door −4, dus klap het teken < om.

Dus de grafiek van $f_p(x) = x^2 + 4x + p$ heeft voor $p > 4$ geen snijpunten met de x-as.

In het voorbeeld wordt de ongelijkheid $p^2 > 36$ opgelost. Deze ongelijkheid heeft als oplossing $p < -6 \vee p > 6$. Zie de schets hiernaast.
Bij het oplossen van ongelijkheden als $p^2 > 36$, $x^2 < 25$ en $q^2 > 6\frac{1}{4}$ mag je de schets weglaten. Dus in één keer $x^2 < 25$ geeft $-5 < x < 5$ en $q^2 > 6\frac{1}{4}$ geeft $q < -2\frac{1}{2} \vee q > 2\frac{1}{2}$.

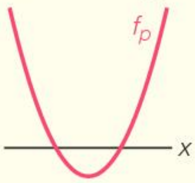


figuur 1.9

Voorbeeld

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = x^2 + px + 9$.
Bereken algebraïsch voor welke p de functie f_p een negatief minimum heeft.

Uitwerking



$$\left.\begin{array}{l}\text{er moet gelden } D > 0\\ D = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = p^2 - 36\end{array}\right\} \begin{array}{l} p^2 - 36 > 0 \\ p^2 > 36 \\ p < -6 \vee p > 6\end{array}$$

37 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 2x^2 - 6x + p$.
Bereken algebraïsch voor welke p
a de grafiek van f_p de x-as raakt
b f_p een negatief minimum heeft.

R38 Maak een schema zoals op de vorige bladzijde, maar nu voor bergparabolen.

39 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 5x + p$.
Bereken algebraïsch voor welke p
a de top van de grafiek van f_p op de x-as ligt
b het maximum van f_p kleiner is dan 0.

A40 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 3x^2 + px + 3$.
Bereken algebraïsch voor welke p
a de top van de grafiek van f_p op de x-as ligt
b f_p een positief minimum heeft.

E41 Bereken exact de oplossingen van de vergelijking $(x^2 - 17x + 71)^{x^2+4} = 1$.

O42 Gegeven zijn de functies $f_p(x) = 4x^2 + px + 5$.
Toon aan dat $x_{top} = -\frac{1}{8}p$ en $y_{top} = -\frac{1}{16}p^2 + 5$.

Theorie B Extremen met een parameter

In opgave 42 heb je gezien dat bij de functies $f_p(x) = 4x^2 + px + 5$ geldt $y_{top} = -\frac{1}{16}p^2 + 5$.
Als gegeven is dat het minimum van f_p gelijk is aan 1, dan geldt dus $-\frac{1}{16}p^2 + 5 = 1$. Hiermee is p te berekenen.
Je krijgt $-\frac{1}{16}p^2 = -4$
$p^2 = 64$
$p = 8 \vee p = -8$

Voorbeeld

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 2x^2 + px + 3$.
Bereken algebraïsch voor welke p het minimum gelijk is aan 1.

Uitwerking

$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{4}p$

$-\frac{p}{4} = -\frac{1}{4}p$

$y_{top} = f_p(-\frac{1}{4}p)$
$= 2 \cdot (-\frac{1}{4}p)^2 + p \cdot -\frac{1}{4}p + 3$
$= 2 \cdot \frac{1}{16}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + 3$
$= \frac{1}{8}p^2 - \frac{1}{4}p^2 + 3$
$= -\frac{1}{8}p^2 + 3$

$(-\frac{1}{4}p)^2 = (-\frac{1}{4})^2 \cdot p^2 = \frac{1}{16}p^2$

Het minimum is 1 geeft $-\frac{1}{8}p^2 + 3 = 1$
$-\frac{1}{8}p^2 = -2$
$p^2 = 16$
$p = 4 \vee p = -4$

43 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door
$f_p(x) = -2x^2 + px + 1$.
Bereken algebraïsch voor welke p het maximum 9 is.

44 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door
$f_p(x) = x^2 + px + 3$.
Bereken algebraïsch voor welke p de top van de grafiek van f_p op de lijn $y = x + 1$ ligt.

45 Van de functie $f_p(x) = px^2 + 6x + 1$ is de extreme waarde -2.
a Bereken p algebraïsch.
b Is de extreme waarde een maximum of een minimum?

A46 De top van de grafiek van $f_{p,q}(x) = \frac{1}{2}x^2 + px + q$ ligt op de parabool $y = x^2 + x + 1$.
a Druk q uit in p.
b Bereken voor welke p en q de x-coördinaat van de top van de grafiek van $f_{p,q}$ gelijk is aan 2.

O47 Voor elke waarde van p is gegeven de vergelijking $x^2 + px - 6 = 0$.
a Neem $p = -1$ en bereken de oplossingen van de vergelijking.
b Neem $p = 2$. Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking?
c Toon aan dat de vergelijking $x^2 + px - 6 = 0$ voor elke p twee oplossingen heeft.

Theorie C Vergelijkingen met een parameter

Met behulp van de parameter p worden in $x^2 - 5x + p = 0$ oneindig veel vergelijkingen met de variabele x genoteerd.
Neem je $p = 4$, dan krijg je $x^2 - 5x + 4 = 0$.
Oplossen geeft $(x - 1)(x - 4) = 0$ en hieruit volgt $x = 1 \vee x = 4$.
Neem je $p = 7$, dan krijg je $x^2 - 5x + 7 = 0$. Deze vergelijking heeft geen oplossingen, want $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -3 < 0$.
Met de discriminant $D = b^2 - 4ac$ van de vergelijking $x^2 - 5x + p = 0$ bereken je voor welke p de vergelijking twee, één of geen oplossingen heeft.
Je krijgt $D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot p = 25 - 4p$.

$D > 0$ geeft $25 - 4p > 0$ oftewel $p < 6\frac{1}{4}$.

Dus voor $p < 6\frac{1}{4}$ zijn er twee oplossingen.

$D = 0$ geeft $p = 6\frac{1}{4}$, dus voor $p = 6\frac{1}{4}$ is er één oplossing.

$D < 0$ geeft $p > 6\frac{1}{4}$, dus voor $p > 6\frac{1}{4}$ zijn er geen oplossingen.

Voorbeeld
Bereken voor welke p de vergelijking $px^2 + 3x + 1 = 0$ twee oplossingen heeft.

Aanpak
Onderscheid de situaties $p = 0$ en $p \neq 0$.

Uitwerking
$p = 0$ geeft de vergelijking $3x + 1 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.

$$\left.\begin{array}{l} p \neq 0 \text{ geeft } D = 3^2 - 4 \cdot p \cdot 1 = 9 - 4p \\ \text{twee oplossingen als } D > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9 - 4p > 0 \\ -4p > -9 \\ p < 2\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus twee oplossingen voor $p < 0 \vee 0 < p < 2\frac{1}{4}$.

R48 Zie het voorbeeld.
a Waarom wordt onderscheid gemaakt tussen de situaties $p = 0$ en $p \neq 0$?
b De oplossing $p < 2\frac{1}{4}$ waarbij bovendien geldt dat $p \neq 0$ wordt in de uitwerking genoteerd als $p < 0 \vee 0 < p < 2\frac{1}{4}$.
Noteer op dezelfde manier $p > -3$ en bovendien $p \neq 0$.

49 Bereken voor welke p de vergelijking twee oplossingen heeft.
a $x^2 - 7x + p = 0$
b $2x^2 - 5x - p = 0$
c $-3x^2 + 4x - p = 0$
d $\frac{1}{4}x^2 - 3x + p = 0$

50
a Bereken voor welke p de vergelijking $x^2 + px + 25 = 0$ twee oplossingen heeft.
b Bereken voor welke p de vergelijking $x^2 + px + 4 = 0$ geen oplossingen heeft.
c Toon aan dat de vergelijking $-2x^2 + px + 3 = 0$ voor elke p twee oplossingen heeft.

51
a Van de vergelijking $x^2 + 2x + p = 0$ is $x = 1$ een oplossing.
Bereken p en de andere oplossing.
b Van de vergelijking $px^2 - 11x + 10 = 0$ is $x = 2$ een oplossing.
Bereken p en de andere oplossing.

52 Bereken voor welke p de vergelijking
a $px^2 + 5x + 2 = 0$ twee oplossingen heeft
b $px^2 - 3x - 4 = 0$ twee oplossingen heeft.

A53 Bereken exact voor welke p de vergelijking
a $2x^2 + x + p = 0$ geen oplossingen heeft
b $px^2 + x + p = 0$ twee oplossingen heeft
c $2x^2 + px + 1 = 0$ twee oplossingen heeft.

A54 a De vergelijking $px^2 + 6x + 9 = 0$ heeft één oplossing.
Bereken p en de bijbehorende oplossing.
b De vergelijking $x^2 + px + 1 = 0$ heeft één oplossing.
Bereken p en de bijbehorende oplossing.

A55 Stel een tweedegraadsvergelijking op met de parameter p die twee oplossingen heeft voor $-4 < p < 0 \vee p > 0$.

O56 a Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = x^2 + px + 7$.
Toon aan dat $x_{top} = -\frac{1}{2}p$ en dat hieruit volgt $p = -2x_{top}$.

Met $p = -2x_{top}$ is p uitgedrukt in x_{top}.

Druk bij de volgende functies p uit in x_{top}.

b $f_p(x) = 2x^2 + px - 3$

c $f_p(x) = -3x^2 + 4px + 4$

d $f_p(x) = px^2 + 6x - 1$

e $f_p(x) = p^2x^2 + 4px + 2$

Theorie D Kromme door toppen

Bij de functies $f_p(x) = px^2 + 4x - 3$ zijn x_{top} en y_{top} uit te drukken in p.

Je krijgt $x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2p} = -\dfrac{2}{p}$ en

$$y_{top} = f_p\left(-\frac{2}{p}\right) = p \cdot \left(-\frac{2}{p}\right)^2 + 4 \cdot -\frac{2}{p} - 3 = p \cdot \frac{4}{p^2} - \frac{8}{p} - 3 = \frac{4}{p} - \frac{8}{p} - 3 = -\frac{4}{p} - 3.$$

Je kunt nu y_{top} uitdrukken in x_{top}.

Uit $x_{top} = -\dfrac{2}{p}$ volgt $p = -\dfrac{2}{x_{top}}$.

Substitueren van $p = -\dfrac{2}{x_{top}}$ in $y_{top} = -\dfrac{4}{p} - 3$ geeft

$$y_{top} = -\frac{4}{\left(-\frac{2}{x_{top}}\right)} - 3 = -4 \cdot -\frac{x_{top}}{2} - 3 = 2 \cdot x_{top} - 3.$$

Substitueren betekent vervangen door.

Hieruit volgt dat alle toppen van de parabolen $y = px^2 + 4x - 3$ op de lijn $y = 2x - 3$ liggen.

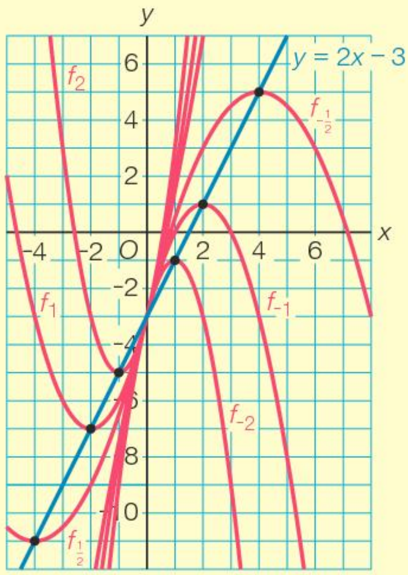
Je hebt de formule van de lijn $y = 2x - 3$ gekregen door $p = -\frac{2}{x_{top}}$ te substitueren in de formule $y_{top} = -\frac{4}{p} - 3$.

Je had $p = -\frac{2}{x_{top}}$ ook kunnen invullen in de formule $y_{top} = p \cdot x_{top}{}^2 + 4 \cdot x_{top} - 3$.

Dit geeft $y_{top} = -\frac{2}{x_{top}} \cdot x_{top}{}^2 + 4 \cdot x_{top} - 3$

$= -2 \cdot x_{top} + 4 \cdot x_{top} - 3 = 2 \cdot x_{top} - 3$.

Met $y = 2x - 3$ is de formule gevonden van de kromme waarop alle toppen van de parabolen $y = px^2 + 4x - 3$ liggen.
De gevraagde kromme is hier een lijn.



figuur 1.10

Voorbeeld

Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 + px - 5$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

Uitwerking

$x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{p}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -\frac{p}{\frac{1}{2}} = -2p$, dus $p = -\frac{1}{2}x_{top}$.

$$\left.\begin{array}{l} y_{top} = \frac{1}{4}x_{top}{}^2 + px_{top} - 5 \\ p = -\frac{1}{2}x_{top} \end{array}\right\} \begin{array}{l} y_{top} = \frac{1}{4}x_{top}{}^2 + -\frac{1}{2}x_{top} \cdot x_{top} - 5 \\ y_{top} = \frac{1}{4}x_{top}{}^2 - \frac{1}{2}x_{top}{}^2 - 5 \\ y_{top} = -\frac{1}{4}x_{top}{}^2 - 5 \end{array}$$

Dus de formule van de kromme is $y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$.

57 Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

a $f_p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + px - 6$

b $f_p(x) = -x^2 + px + 2p$

c $f_p(x) = p^2x^2 - 2px + 3$

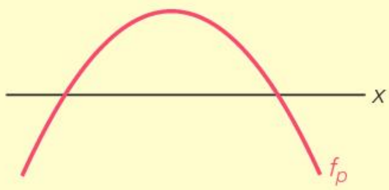
d $f_p(x) = px^2 - px + 1$

A58 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = px^2 + 6x + p$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

Terugblik

Discriminanten met een parameter

Met $f_p(x) = -x^2 + 3x + p$ worden oneindig veel functies aangegeven.
Neem je de parameter $p = 2$ dan krijg je $f_2(x) = -x^2 + 3x + 2$.
Zoek je functies f_p met een positief maximum, dan gebruik je $D > 0$.
Je hebt dan te maken met een bergparabool waarvan de top boven de x-as ligt. Zie de figuur hiernaast.
Omdat $D = 3^2 - 4 \cdot -1 \cdot p = 9 + 4p$ krijg je $9 + 4p > 0$, dus $p > -2\frac{1}{4}$.



Extremen met een parameter

Om te berekenen voor welke waarde van p het maximum van de functie $f_p(x) = -x^2 + px + p$ gelijk is aan 3, druk je eerst x_{top} en vervolgens y_{top} uit in p.
Je krijgt $x_{top} = -\dfrac{p}{-2} = \frac{1}{2}p$ en $y_{top} = -(\frac{1}{2}p)^2 + p \cdot \frac{1}{2}p + p = -\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p^2 + p = \frac{1}{4}p^2 + p$.
Omdat het maximum gelijk is aan 3 krijg je $\frac{1}{4}p^2 + p = 3$.
Dit geeft $p^2 + 4p - 12 = 0$ en hieruit volgt $p = 2 \vee p = -6$.
Dus het maximum is gelijk aan 3 voor $p = 2 \vee p = -6$.

Vergelijkingen met een parameter

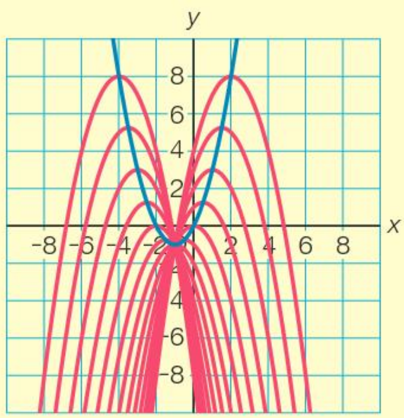
Om te berekenen voor welke p de vergelijking $2x^2 + px + 8 = 0$ twee oplossingen heeft, gebruik je dat moet gelden $D > 0$. Je krijgt $p^2 - 64 > 0$ oftewel $p^2 > 64$ en hieruit volgt $p < -8 \vee p > 8$.
Om te berekenen voor welke p de vergelijking $px^2 + 6x + 3 = 0$ twee oplossingen heeft, bedenk je eerst dat voor $p = 0$ de vergelijking over gaat in $6x + 3 = 0$ en deze vergelijking heeft één oplossing.
Voor $p \neq 0$ krijg je $D = 36 - 12p$.
$D > 0$ geeft $36 - 12p > 0$ en hieruit volgt $p < 3$. Dus de vergelijking $px^2 + 6x + 3 = 0$ heeft twee oplossingen voor $p < 0 \vee 0 < p < 3$.

Kromme door toppen

De toppen van de grafieken van de functies $f_p(x) = -x^2 + px + p$ liggen op een kromme. De formule van deze kromme krijg je door eerst p uit te drukken in x_{top} en vervolgens y_{top} uit te drukken in x_{top}.
Uit $x_{top} = \frac{1}{2}p$ volgt $p = 2 \cdot x_{top}$.
Substitutie van $p = 2 \cdot x_{top}$ in de formule van f geeft

$$\begin{aligned} y_{top} &= -x_{top}{}^2 + 2 \cdot x_{top} \cdot x_{top} + 2 \cdot x_{top} \\ &= -x_{top}{}^2 + 2 \cdot x_{top}{}^2 + 2 \cdot x_{top} \\ &= x_{top}{}^2 + 2 \cdot x_{top} \end{aligned}$$

Dus de formule van de kromme waarop alle toppen liggen is $y = x^2 + 2x$.



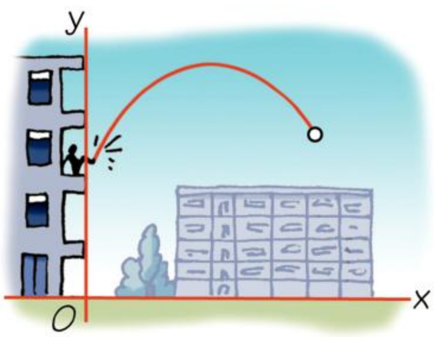
1.4 Domein, bereik en modulusfuncties

059

Arie trapt van een balkon op 5 meter hoogte een bal weg.
Bij de baan van de bal hoort de functie $y = -0{,}01x^2 + 0{,}4x + 5$. Hierin zijn x en y in meter.
Zie figuur 1.11.

a Hoe hoog komt de bal maximaal?

b Hoeveel meter verderop komt de bal op de grond?



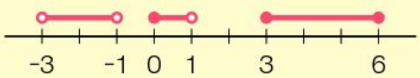
figuur 1.11

Theorie A Domein en bereik

In praktische situaties heb je vaak maar met een gedeelte van een grafiek te maken. In opgave 59 heb je hiervan een voorbeeld gezien.
Omdat de bal 50 meter verder op de grond komt, geldt de formule dus voor $0 \leq x \leq 50$. We zeggen dat het **domein** het **gesloten interval** nul vijftig is. Notatie: domein = [0, 50].
Een **interval** is een stuk van de getallenlijn.
Gesloten betekent dat de grenzen erbij horen. In de notatie zie je dat aan de teksthaken [en].
In opgave 59 heb je gezien dat de maximale hoogte van de bal 9 meter is. Voor de baan van de bal geldt dus $0 \leq y \leq 9$. We zeggen dat het **bereik** het gesloten interval nul negen is.
Notatie: bereik = [0, 9].

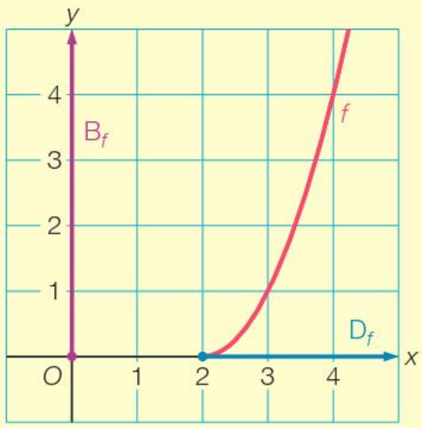
Het domein van een functie bestaat uit alle originelen.
Het bereik van een functie bestaat uit alle functiewaarden.

Behalve gesloten intervallen zijn er ook open intervallen.
Bij een **open interval** horen de grenzen er niet bij.
Open intervallen worden met de haken ⟨ en ⟩ genoteerd. Zo bestaat het interval ⟨−3, −1⟩ uit alle getallen tussen −3 en −1. In figuur 1.12 is dit interval aangegeven boven een getallenlijn. Aan de open rondjes bij −3 en −1 zie je dat de getallen −3 en −1 niet bij het interval horen.
Ook zie je de intervallen [0, 1⟩ en [3, 6].
Het interval [0, 1⟩ spreek je uit als het links gesloten rechts open interval nul één.



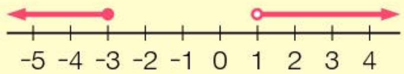
figuur 1.12

Verder zijn er **oneindig grote intervallen**.
Heb je te maken met de functie $f(x) = (x - 2)^2$ waarbij $x \geq 2$, dan wordt het domein van f genoteerd als $D_f = [2, \rightarrow\rangle$. Spreek uit: het domein van f is het **links gesloten interval** twee oneindig.
Het bereik van f is $B_f = [0, \rightarrow\rangle$ Zie figuur 1.13.



figuur 1.13

In figuur 1.14 zie je de intervallen $\langle\leftarrow, -3]$ en $\langle 1, \rightarrow\rangle$.
Bij $\langle\leftarrow, -3]$ is de uitspraak: het rechts gesloten interval min oneindig min drie.
Het interval $\langle\leftarrow, \rightarrow\rangle$ wordt genoteerd als $\mathbb{R}$.



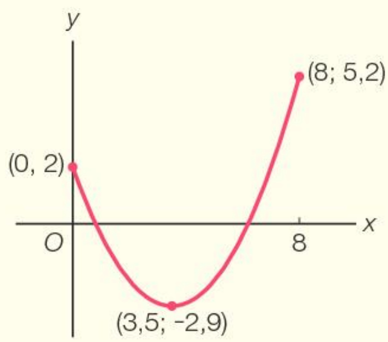
figuur 1.14 De intervallen $\langle\leftarrow, -3]$ en $\langle 1, \rightarrow\rangle$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}4x^2 - 2{,}8x + 2$.
Neem $D_f = [0, 8]$ en bereken B_f.

Aanpak
Bereken van de grafiek de coördinaten van de eindpunten en de top.
Schets de grafiek en lees het bereik af uit de schets.

Uitwerking
$f(0) = 2$ en $f(8) = 0{,}4 \cdot 8^2 - 2{,}8 \cdot 8 + 2 = 5{,}2$
$x_{top} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2{,}8}{0{,}8} = 3{,}5$ en
$y_{top} = f(3{,}5) = 0{,}4 \cdot 3{,}5^2 - 2{,}8 \cdot 3{,}5 + 2 = -2{,}9$
Zie de schets hiernaast.
$B_f = [-2{,}9; 5{,}2]$



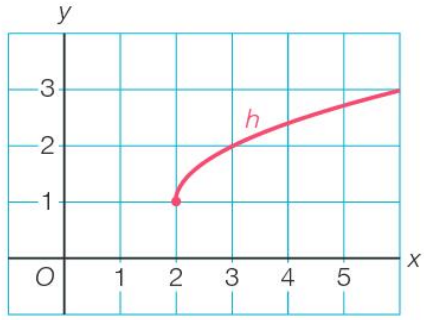
60
Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 6x - 3$.
a Neem $D_f = [-1, 6]$ en bereken B_f.
b Neem $D_f = [4, 8]$ en bereken B_f.

61

a Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ met $D_f = [-3, 4]$.
Bereken het bereik van f.

b Geef het bereik van de functie $g(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 4$.

c Hiernaast is de grafiek getekend van de functie $h(x) = 1 + \sqrt{x-2}$.
Geef het domein en het bereik van h.



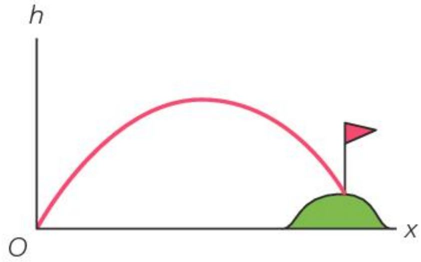
figuur 1.15

A 62

Joost slaat een golfbal vanaf de tee naar een green die 3,0 meter hoger ligt dan de tee. De baan van de bal is gegeven door de formule $h = -0{,}004x^2 + 0{,}62x$. Hierin zijn h en x in meter.

a Bereken het domein van h.

b Bereken het bereik van h.



figuur 1.16

O 63

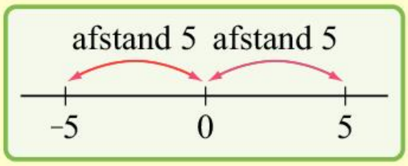
Voor de functie f geldt:
$f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ als $x \geq 4$
$f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ als $x < 4$.

a Teken de grafiek van f.

b Geef het bereik van f.

Theorie B Modulusfuncties

De functie f van opgave 63 is te noteren als $f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 2\right|$. Hierbij zijn **modulusstrepen** om $\frac{1}{2}x - 2$ gezet. De **modulus** of **absolute waarde** van een getal is de afstand van dat getal tot 0 op de getallenlijn. Dus de modulus van 5 is gelijk aan 5 en de modulus van -5 is gelijk aan 5. Notatie: $|5| = 5$ en $|-5| = 5$.



$|x|$ is de absolute waarde oftewel de modulus van x.

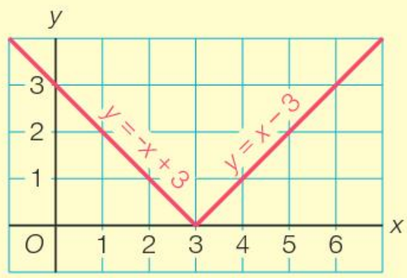
$|x|$ is de afstand van het getal x tot 0 op de getallenlijn.

$$|x| = \begin{cases} x \text{ als } x \geq 0 \\ -x \text{ als } x < 0 \end{cases}$$

Voor de **modulusfunctie** $f(x) = |x - 3|$ geldt dus

- $f(x) = x - 3$ als $x - 3 \geq 0$, dus als $x \geq 3$
- $f(x) = -(x - 3) = -x + 3$ als $x - 3 < 0$, dus als $x < 3$.

De grafiek van f bestaat uit twee halve lijnen, zie figuur 1.17.



figuur 1.17

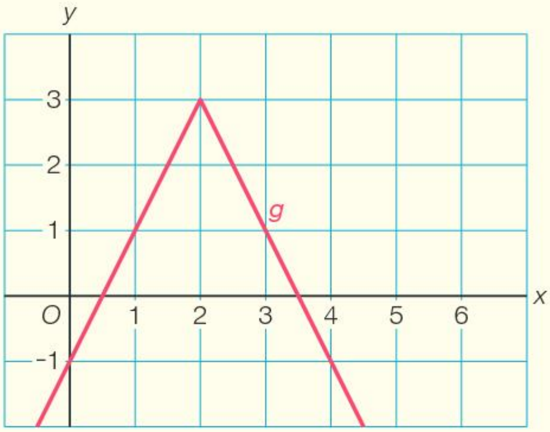
Voorbeeld

Teken de grafiek van $g(x) = 3 - |2x - 4|$ en geef het bereik van g.

Uitwerking

$g(x) = 3 - |2x - 4| = 3 - (2x - 4) = 3 - 2x + 4 = -2x + 7$ als $2x - 4 \geq 0$, dus als $x \geq 2$.

$g(x) = 3 - |2x - 4| = 3 - (-2x + 4) = 3 + 2x - 4 = 2x - 1$ als $2x - 4 < 0$, dus als $x < 2$.



Het bereik van g is $B_g = \langle \leftarrow, 3]$.

64

Teken in verschillende figuren de grafiek van de functie en geef het bereik.

a $f(x) = \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

b $g(x) = -|2x - 6|$

c $h(x) = 2 - \left|\frac{1}{3}x - 2\right|$

d $k(x) = 5 - \left|6 - 1\frac{1}{2}x\right|$

65

Gegeven is de functie f met het functievoorschrift $f(x) = x + 2 - |2x - 1|$.

a Teken de grafiek van f en geef het bereik van f.

b Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de grafiek van $g(x) = -x^2 + 4x + 3$.

A66

De grafiek van $f(x) = ax - 1 - |3x - 4|$ gaat door het punt $(1, 0)$.

a Bereken a, teken de grafiek van f en geef het bereik van f.

b De lijn $y = x$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B. Bereken de coördinaten van A en B.

c Voor welke waarden van p heeft de lijn $y = px$ geen enkel punt met de grafiek van f gemeen?

A67 ⊙✱ Gegeven is de functie $f(x) = |x^2 - x - 6|$.

a Teken de grafiek van f en geef het bereik van f.

b Bereken exact de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de grafiek van $g(x) = x + 5$.

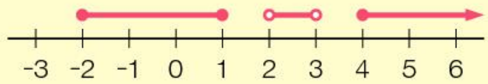
A68 ✱ Teken de grafiek van $f(x) = 4 - |3 - |2x - 6||$.

E69 ✱ a en b zijn getallen.
Wat wordt er berekend met $\frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}|a - b|$?

Terugblik

Intervallen

Een interval is een stuk van de getallenlijn.
Het interval [−2, 1] is een voorbeeld van een gesloten interval.
De getallen −2 en 1 horen bij dit interval.
Bij het open interval ⟨2, 3⟩ horen de getallen 2 en 3 niet bij het interval.
Bij [4, →⟩ heb je te maken met een oneindig groot interval, het links gesloten interval vier oneindig.



Domein en bereik

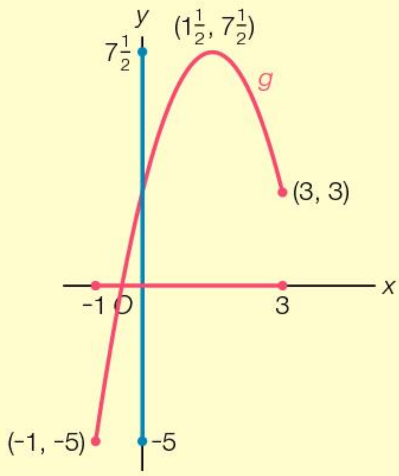
Bij een functie vormen alle originelen samen het domein van de functie.
Alle functiewaarden samen vormen het bereik.
Bij een gegeven domein is het bereik te berekenen.
Om bij de functie $g(x) = -2x^2 + 6x + 3$ met $D_g = [-1, 3]$ het bereik te vinden, bereken je eerst van de grafiek de coördinaten van de eindpunten en de top. Je krijgt

- $g(-1) = -5$ en $g(3) = 3$, dus de eindpunten zijn $(-1, -5)$ en $(3, 3)$.
- $x_{top} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-4} = 1\frac{1}{2}$ en

  $y_{top} = g(1\frac{1}{2}) = -2 \cdot (1\frac{1}{2})^2 + 6 \cdot 1\frac{1}{2} + 3 = 7\frac{1}{2}$,

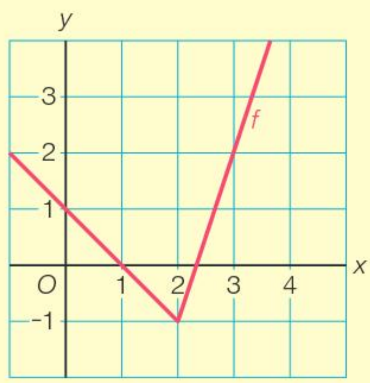
  dus de top is $(1\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})$.

Vervolgens maak je een schets van de grafiek. Zie hiernaast.
Lees af: het bereik is $B_g = \left[-5, 7\frac{1}{2}\right]$.



Modulusfuncties

De functie $f(x) = x - 3 + |2x - 4|$ is een voorbeeld van een modulusfunctie.
Omdat $|2x - 4| = 2x - 4$ als $2x - 4 \geq 0$, dus als $x \geq 2$, is $f(x) = x - 3 + 2x - 4 = 3x - 7$ als $x \geq 2$.
Omdat $|2x - 4| = -2x + 4$ als $2x - 4 < 0$, dus als $x < 2$, is $f(x) = x - 3 - 2x + 4 = -x + 1$ als $x < 2$.
In de figuur hiernaast zie je de grafiek van f.
Je leest het bereik van f af uit de figuur. Je krijgt $B_f = [-1, \rightarrow\rangle$.

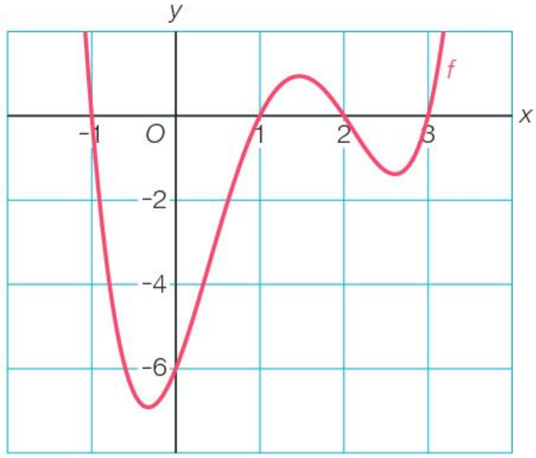


1.5 Grafisch-numeriek oplossen

070 In figuur 1.18 is de grafiek van de functie $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$ getekend.

a Lees de nulpunten van f af uit de figuur.

b Geef de oplossingen van de vergelijking $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$.

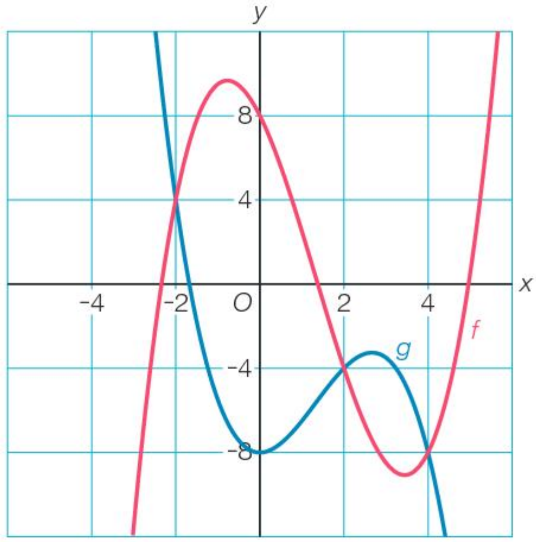


figuur 1.18

071 In figuur 1.19 zijn de grafieken van de functies $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ en $g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 8$ getekend.

a Lees de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken af uit de figuur.

b Geef de oplossingen van de vergelijking $\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 8$.



figuur 1.19

Theorie A Toppen en snijpunten met de GR

Op de GR kun je grafieken van functies **plotten** en vervolgens benaderingen berekenen van nulpunten en van x-coördinaten van snijpunten.
Deze x-coördinaten zijn oplossingen van een vergelijking.
Het oplossen van een vergelijking op de GR met behulp van grafieken heet **grafisch-numeriek oplossen**. Aan de vraagstelling is te zien of je een vergelijking algebraïsch moet oplossen, of dat je grafisch-numeriek te werk mag gaan.

Plotten is het tekenen van de grafiek op het scherm van de GR.

Bij het oplossen van vergelijkingen kun je met drie soorten opdrachten te maken krijgen.

- Bij de opdracht 'Los algebraïsch op' moet je de vergelijking stap voor stap oplossen. Je mag geen gebruik maken van de specifieke opties van de grafische rekenmachine. De oplossingen moet je soms benaderen.
- Bij de opdracht 'Bereken exact de oplossingen' moet je algebraïsch te werk gaan en mag je de oplossingen niet benaderen.
- Bij de opdracht 'Los op' of 'Bereken de oplossingen' mag je de werkwijze zelf kiezen. Het is daarbij toegestaan om grafisch-numeriek op te lossen. Je krijgt dan meestal benaderingen van oplossingen.

[▶GR] Neem de module **Formules, grafieken en tabellen** en de module **Toppen en snijpunten** door.

Bij het gebruik van de GR vermeld je de formules die je invoert, noteer je de gebruikte optie en beantwoord je de gestelde vraag.

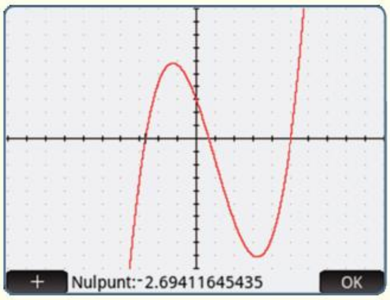
Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 3$.
Rond in deze opgave de antwoorden af op twee decimalen.

a Bereken de nulpunten van f.
b Bereken de extreme waarden van f.
c Los op $f(x) = x - 2$.

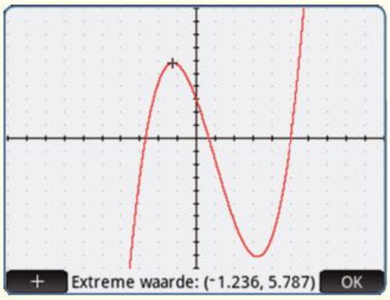
Uitwerking

a Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 3$.
De optie nulpunt geeft de nulpunten −2,69, 0,66 en 5,03.



b De optie maximum geeft $x \approx -1{,}24$ en $y \approx 5{,}79$.
De optie minimum geeft $x \approx 3{,}24$ en $y \approx -9{,}12$.
Dus max. is $f(-1{,}24) \approx 5{,}79$ en min. is $f(3{,}24) \approx -9{,}12$.

c Voer in $y_2 = x - 2$.
De optie snijpunt geeft de oplossingen
$x \approx -3{,}19$, $x \approx 0{,}89$ en $x \approx 5{,}30$.



72 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

b $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$

c $0{,}4x^3 + 2x^2 + x - 2 = x + 2$

d $0{,}2x^5 - x^4 + 4x^2 = 0{,}2x + 3$

73 Bereken van de volgende functies de extreme waarden. Rond af op twee decimalen.

a $f(x) = 0{,}2x^4 - x^3 - x^2 + 8x + 2$

b $g(x) = -1\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 40x - 28$

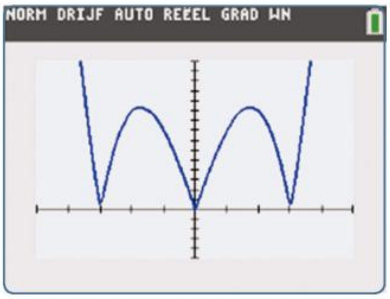
74 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + 4$.
Rond in deze opgave de antwoorden af op twee decimalen.

a Bereken de nulpunten van f.

b Bereken de extreme waarden van f.

c Los op $f(x) = -x + 3$.

75 Gegeven is de functie $f(x) = |x^3 - 9x|$.
Op het GR-scherm hiernaast is de grafiek van f geplot.
Hiervoor is ingevoerd $y_1 = |x^3 - 9x|$ met x tussen -5 en 5 en y tussen -5 en 15.
Op de TI gebruik je abs uit het MATH-NUM-menu.
Op de Casio gebruik je Abs uit het OPTN-NUM-menu.
Op de HP vind je $|\square|$ bij de sjablonen.



figuur 1.20

Los de volgende vergelijkingen op. Rond af op twee decimalen.

a $|x^3 - 9x| = 5$

b $|x^3 - 9x| = x + 5$

A76 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $0{,}5x^3 - 5x^2 + 20 = 0$

b $0{,}1x^4 + 0{,}1x^3 - 12x^2 + 50 = 25x$

c $|x^4 - x^3 + x - 5| = x + 3$

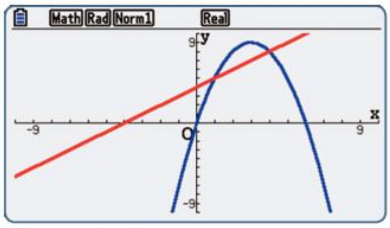
d $|x^3 - 5x^2 - 2x + 24| = 20$

A77 De top van de grafiek van $f_p(x) = 2x^2 + p^2x + p$ ligt op de lijn $y = 8x + 4$.
Bereken p en de bijbehorende extreme waarde. Rond zo nodig af op drie decimalen.

078 Op het GR-scherm hiernaast zijn de grafieken van de functies $f(x) = -x^2 + 6x$ en $g(x) = x + 4$ geplot.

a Bereken de oplossingen van de vergelijking $-x^2 + 6x = x + 4$.

b Voor welke waarden van x ligt de grafiek van f boven de grafiek van g?



figuur 1.21

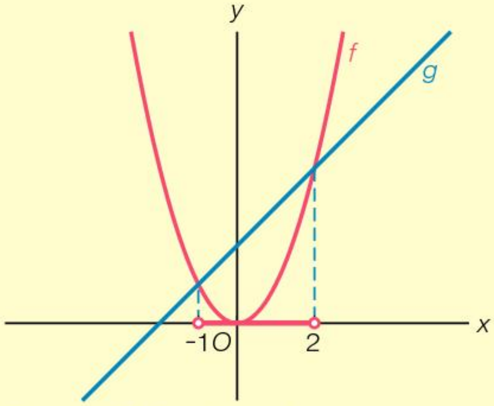
Theorie B Ongelijkheden oplossen

In opgave 78 heb je gekeken voor welke waarden van x de grafiek van $f(x) = -x^2 + 6x$ boven die van $g(x) = x + 4$ ligt. Daarmee heb je de ongelijkheid $-x^2 + 6x > x + 4$ opgelost.

De oplossing van de ongelijkheid $x^2 < x + 2$ is uit figuur 1.22 af te lezen. Je kijkt voor welke waarden van x de grafiek van $f(x) = x^2$ onder die van $g(x) = x + 2$ ligt.
Op de x-as lees je af $x^2 < x + 2$ geeft $-1 < x < 2$.

x ligt tussen -1 en 2.

Ook kun je aflezen $x^2 \geq x + 2$ geeft $x \leq -1 \vee x \geq 2$.



figuur 1.22 Op de x-as is aangegeven waar $f(x) < g(x)$ is.

Bij het oplossen van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ heb je de oplossingen van de vergelijking $f(x) = g(x)$ en een schets van de grafieken van f en g nodig. Nadat je de vergelijking hebt opgelost, lees je uit de schets af voor welke waarden van x de grafiek van f onder die van g ligt.

Bij het oplossen van een ongelijkheid lees je het antwoord af op de x-as.
Bij $f(x) < g(x)$ kijk je voor welke x de grafiek van f onder die van g ligt.
Bij $f(x) > g(x)$ kijk je voor welke x de grafiek van f boven die van g ligt.

Ook bij het oplossen van ongelijkheden kun je aan de vraagstelling zien of je algebraïsch te werk moet gaan, of dat je de grafisch-numerieke aanpak mag kiezen.

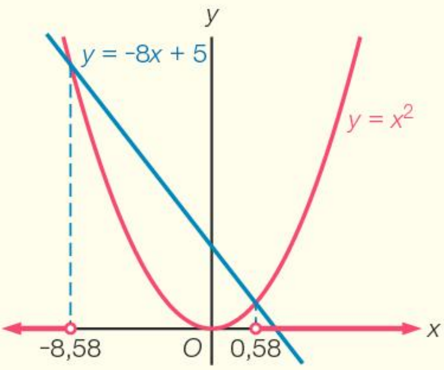
Werkschema: het oplossen van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$
1. Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ op.
2. Schets de grafieken van f en g.
3. Geef op de x-as aan waar de grafiek van f onder die van g ligt.
4. Geef de oplossing van de ongelijkheid.

Voorbeeld

Los op $x^2 > -8x + 5$. Rond af op twee decimalen.

Uitwerking

Voer in $y_1 = x^2$ en $y_2 = -8x + 5$.
De optie snijpunt geeft $x \approx -8{,}58$ en $x \approx 0{,}58$.



$x^2 > -8x + 5$ geeft $x < -8{,}58 \vee x > 0{,}58$

79 Los op. Rond zo nodig af op drie decimalen.

a $x^2 - 3x \leq 14$
b $x^2 + 2x > 11$
c $8x^2 + 6x - 35 \geq 0$
d $x^3 + 4{,}5x^2 < 19x + 60$

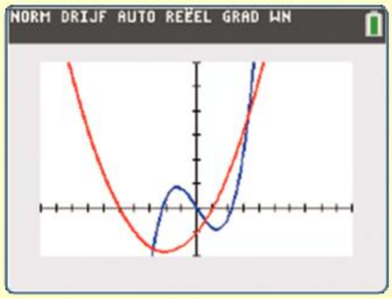
A80 Los op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

a $0{,}1x^3 - 2x^2 + 8x + 10 \geq -x + 15$
b $-0{,}5x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 8 \geq x + 7$
c $\left|x^3 - 10x\right| \leq 2x + 8$
d $\left|x^4 + x^2 - 5x - 10\right| \leq 8 - \left|2x - 4\right|$

Terugblik

Vergelijkingen en ongelijkheden grafisch-numeriek oplossen

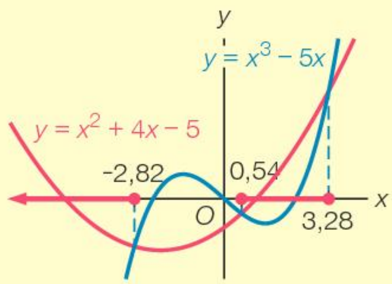
Elke vergelijking is grafisch-numeriek op te lossen. Je voert daarbij op de GR de formules y_1 = linkerlid en y_2 = rechterlid in. Vervolgens plot je de grafieken en bereken je met de optie snijpunt de coördinaten van de snijpunten.
De x-coördinaten van de snijpunten zijn de oplossingen van de vergelijking.
Zo voer je voor het grafisch-numeriek oplossen van de vergelijking $x^3 - 5x = x^2 + 4x - 5$ de formules $y_1 = x^3 - 5x$ en $y_2 = x^2 + 4x - 5$ in. Kies het venster zo, dat alle snijpunten op het scherm te zien zijn. Zie het GR-scherm hiernaast.



De optie snijpunt geeft de oplossingen $x \approx -2{,}82$, $x \approx 0{,}54$ en $x \approx 3{,}28$.
De optie nulpunt kun je gebruiken als het linker- of rechterlid nul is.

Voor het oplossen van de ongelijkheid $f(x) > g(x)$ ga je als volgt te werk.

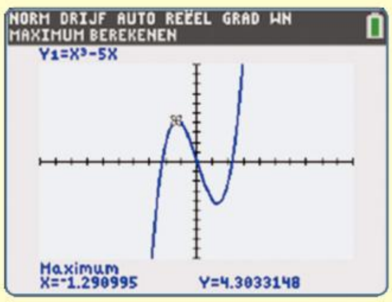
- Los op $f(x) = g(x)$.
- Schets de grafieken van f en g.
- Geef op de x-as aan waar de grafiek van f boven die van g ligt.
- Geef de oplossing van de ongelijkheid.



Voor de schets bij de ongelijkheid $x^3 - 5x \leq x^2 + 4x - 5$ gebruik je het GR-scherm hierboven.
$x^3 - 5x \leq x^2 + 4x - 5$ geeft $x \leq -2{,}82 \vee 0{,}54 \leq x \leq 3{,}28$

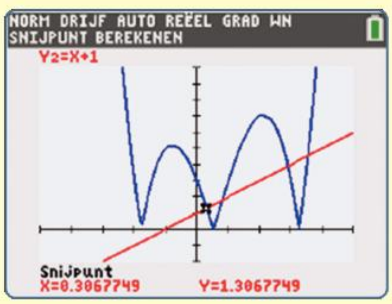
Toppen berekenen met de GR

Om met de GR de toppen van de grafiek van $f(x) = x^3 - 5x$ te berekenen, gebruik je de opties minimum en maximum.
Je krijgt max. is $f(-1{,}29) \approx 4{,}30$ en min. is $f(1{,}29) \approx -4{,}30$.



Modulusongelijkheden

Om de modulusongelijkheid $\left|x^3 - 2x^2 - 5x + 3\right| \leq x + 1$ op te lossen, voer je in $y_1 = \left|x^3 - 2x^2 - 5x + 3\right|$ en $y_2 = x + 1$.
Op de TI gebruik je abs uit het MATH-NUM-menu, op de Casio Abs uit het OPTN-NUM-menu en bij de HP gebruik je het sjabloon |□|. In het scherm hiernaast is x tussen −5 en 5, en y tussen −2 en 10 genomen.



De optie snijpunt geeft $x \approx 0{,}31$, $x \approx 0{,}81$, $x \approx 2{,}90$ en $x \approx 3{,}54$.
Dus $\left|x^3 - 2x^2 - 5x + 3\right| \leq x + 1$ geeft
$0{,}31 \leq x \leq 0{,}81 \vee 2{,}90 \leq x \leq 3{,}54$.

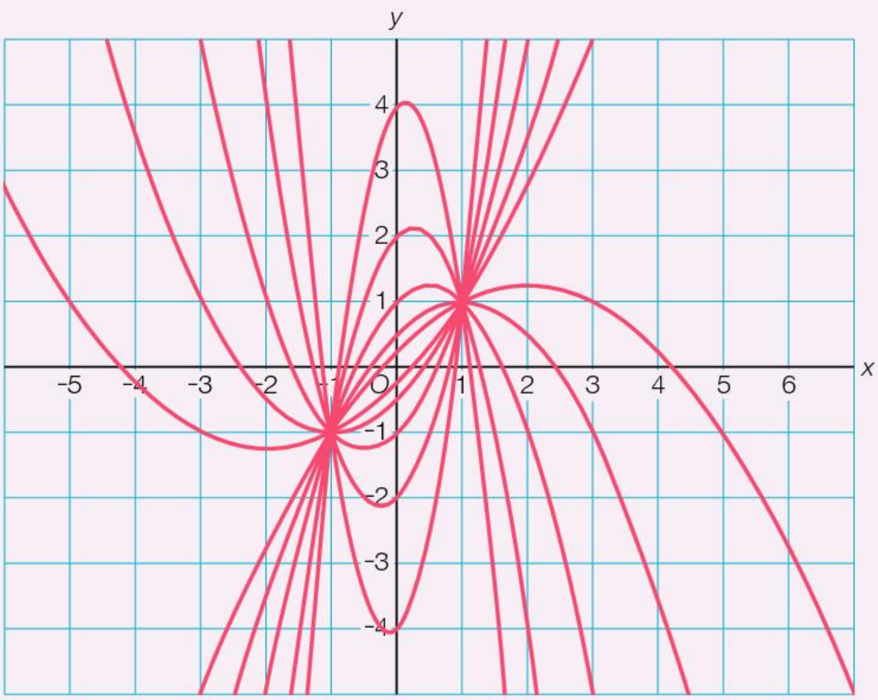
Eindopdracht Waaiers parabolen en formules van krommen

Op bladzijde 8 heb je onder andere onderzocht hoe je de formule krijgt van de grafiek waarop alle toppen liggen van de parabolen $y = ax^2 + 4x$ en van de parabolen $y = -x^2 + bx$.

- Voer dit onderzoek nog eens uit met de kennis die je in dit hoofdstuk hebt opgedaan.

In het vervolg van deze opdracht gaan we uit van de algemene vorm $y = ax^2 + bx + c$.

- Neem $b = 10$ en $c = 7$ en stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de parabolen liggen die je zo krijgt.
- Voor welke waarden van b en c liggen alle toppen van de parabolen op de lijn $y = 4x + 3$?
- Neem $a = \frac{1}{4}$ en $c = 5$ en stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de parabolen liggen die je zo krijgt.
- Voor welke waarden van a en c liggen alle toppen op de parabool $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2$?



In de figuur hierboven zie je een waaier van parabolen.
Al deze parabolen gaan door de punten $(-1, -1)$ en $(1, 1)$. Door van beide punten de coördinaten in te vullen in de formule $y = ax^2 + bx + c$ kun je b berekenen en c uitdrukken in a.

- Bereken b, druk c uit in a en stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de parabolen van deze waaier liggen.

Diagnostische toets

1.1 Lineaire functies

1 **a** De lijn k gaat door het punt $A(1, 6)$ en $rc_k = 4$.
Stel de formule op van k.
b Stel een vergelijking op van de lijn l door de punten $B(1, 5)$ en $C(3, -1)$.
c De lijn m: $y = ax - 3$ gaat door het punt $D(8, 1)$.
Bereken a.

2 N is een lineaire functie van t.
Voor $t = 2$ is $N = 100$ en voor $t = 5$ is $N = 160$.
a Schrijf N als functie van t.
b Druk t uit in N.
c Bereken t voor $N = 440$.

1.2 Tweedegraadsfuncties en tweedegraadsvergelijkingen

3 De top van de grafiek van $f(x) = 0{,}45x^2 - 1{,}8x + 5$ ligt op de lijn k: $y = 2x + b$.
Bereken b.

4 Bereken exact de oplossingen.
a $5x^2 = 3x$
b $2x^2 + 12x = 14$
c $(2x - 4)^2 = 144$
d $3x^2 = 18x + 30$
e $3x^2 - 6x = 2$
f $(2x + 1)^2 = 3x(x + 1) - x$

1.3 Werken met parameters

5 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = 3x^2 + px + 3$.
Bereken algebraïsch voor welke p
a de grafiek van f_p de x-as raakt
b f_p een negatief minimum heeft.

6 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = x^2 + px + 1$.
Bereken algebraïsch voor welke p het minimum gelijk is aan -3.

7 Bereken voor welke p de vergelijking
a $2x^2 + 4x + p = 0$ geen oplossingen heeft
b $3x^2 + px + 12 = 0$ één oplossing heeft
c $px^2 + 2x + 5 = 0$ twee oplossingen heeft.

8 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door $f_p(x) = x^2 + 2px + p$.
Stel de formule op van de kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

1.4 Domein, bereik en modulusfuncties

9 Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}6x^2 - 4{,}8x + 3$.

a Neem $D_f = [0, 5]$ en bereken B_f.

b Neem $D_f = [2, 10]$ en bereken B_f.

10 Gegeven is de functie f met het functievoorschrift $f(x) = 2x + 1 - |3x - 6|$.

a Teken de grafiek van f en geef het bereik van f.

b Bereken exact de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f en de grafiek van $g(x) = -x^2 + 9x - 14$.

1.5 Grafisch-numeriek oplossen

11 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$.
Rond in deze opgave de antwoorden af op twee decimalen.

a Bereken de nulpunten van f.

b Bereken de extreme waarden van f.

c Los op $f(x) = 2x - 3$.

12 Los op. Rond af op twee decimalen.

a $\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 3x - 3 \geq -x^2 - 4x$

b $x^2 + 5x \leq x^3 + 2x^2 - 6x + 1$

c $|x^3 - 3x| < -\frac{1}{2}x + 2$

2 De afgeleide functie

Wat leer je?

- Differentiequotiënten gebruiken om gemiddelde snelheden te berekenen en de snelheid op één moment te benaderen.
- Hellinggrafieken tekenen.
- De definitie van de afgeleide gebruiken om regels voor het differentiëren te bewijzen.
- De formule van een raaklijn opstellen met behulp van de afgeleide functie.

Beginopdracht Hartslagfrequentie bij zware inspanning

Bij een onderzoek naar de hartslagfrequentie van sporters wordt binnen enkele minuten een zware inspanning geleverd. Het blijkt dat de hartslag direct begint te stijgen na aanvang van de test en begint te dalen na het verrichten van de inspanning.
Een atleet verricht gedurende anderhalve minuut een zware inspanning.
In de tabel zie je de meetgegevens bij deze test. Hierin is t de tijd in minuten vanaf de aanvang van de test en F de hartslagfrequentie in slagen per minuut.

t	0	1	1,5	2	3	4	5
F	50	142	150	145	123	102	85

- Teken een grafiek bij de tabel.

De onderzoeker is naast de maximale hartslagfrequentie ook geïnteresseerd in de snelheid waarmee de hartslagfrequentie toeneemt en afneemt.
Uit de gegevens blijkt dat tussen $t = 0$ en $t = 1{,}5$ de gemiddelde snelheid waarmee de hartslagfrequentie toeneemt ongeveer 67 slagen per minuut per minuut is.
- Licht het getal 67 toe met een berekening en licht toe waarom er staat ‘slagen per minuut per minuut’.
- Bereken de gemiddelde snelheid in slagen per minuut per seconde waarmee de hartslagfrequentie toeneemt tussen $t = 0$ en $t = 1{,}5$. Rond af op één decimaal. Doe dat ook voor de eerste minuut van de test.

Er is verschil in de gemiddelde snelheid waarmee de hartslagfrequentie afneemt tussen $t = 2$ en $t = 3$ en tussen $t = 3$ en $t = 5$.
- Toon dit aan door deze gemiddelde snelheden te berekenen in slagen per minuut per seconde. Rond af op twee decimalen.

De onderzoeker heeft een formule opgesteld bij de tabel. Deze formule is $F = \dfrac{135t + 50}{0{,}3t^2 + 1}$.
- Onderzoek of deze formule klopt met de tabel. Wat is volgens deze formule het maximale aantal hartslagen per minuut? Voor welke t wordt dit maximum bereikt?

Met de formule zijn gemiddelde snelheden te berekenen op kleinere tijdsintervallen dan met de tabel mogelijk is. En daarmee zijn snelheden op één bepaald tijdstip te benaderen.
Zo kun je de snelheid op $t = 0{,}5$ benaderen door de gemiddelde snelheid tussen $t = 0{,}49$ en $t = 0{,}51$ te berekenen.
- Benader op deze manier de snelheid waarmee de hartslagfrequentie toeneemt op $t = 0{,}5$. Geef het antwoord in aantal slagen per minuut per seconde en rond af op één decimaal.
- Benader de snelheid waarmee de hartslagfrequentie afneemt op $t = 2{,}5$. Geef het antwoord in aantal slagen per minuut per seconde en rond af op twee decimalen.

Voorkennis Snelheid

Theorie A Gemiddelde snelheid

Op 19 juli 2018 werd in de Tour de France de twaalfde etappe gereden van Bourg-Saint-Maurice naar Alpe d'Huez. De afstand van 175,5 km werd door de winnaar Geraint Thomas in 5 uur, 18 minuten en 37 seconden afgelegd.
Je kunt de gemiddelde snelheid waarmee Thomas deze etappe reed als volgt berekenen.
18 minuten is $\frac{18}{60}$ uur en 37 seconden is $\frac{37}{3600}$ uur.
De tijd is dus $5 + \frac{18}{60} + \frac{37}{3600} = 5{,}3102...$ uur.

De finish van de twaalfde etappe waarin Tom Dumoulin tweede werd.

De gemiddelde snelheid is $\frac{175{,}5}{5{,}3102...} \approx 33{,}049$ km/uur.
Je kunt de gemiddelde snelheid ook uitdrukken in meter per seconde.
Omdat $1 \text{ km/uur} = \frac{1000 \text{ meter}}{3600 \text{ seconden}} = \frac{1}{3{,}6}$ m/s is de gemiddelde snelheid
$\frac{33{,}049}{3{,}6} \approx 9{,}18$ m/s.

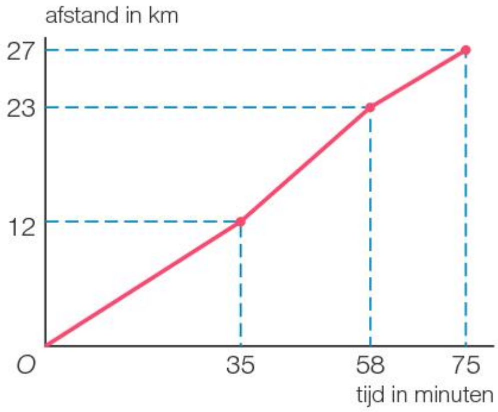
1 In de twaalfde etappe van de Tour de France van 2018 kwam de Nederlander Ramon Sinkeldam 37 minuten en 36 seconden na Thomas over de eindstreep.
Bereken de gemiddelde snelheid van Ramon in km/uur en in m/s. Rond af op twee decimalen

2 De twaalfde etappe van de Tour de France van 2018 eindigde op Alpe d'Huez op een hoogte van 1850 meter. Deze berg is van de buitencategorie. Onderweg beklommen de renners nog twee andere bergen van de buitencategorie: de Col de la Madeleine (2000 m) en de Col de la Croix-de-Fer (2067 m). De Col de la Madeleine werd beklommen vanuit Albertville. Deze beklimming heeft een lengte van 25 km. De afdaling ging naar La Chambre en heeft een lengte van 19 km.
Neem aan dat een renner 1 uur en 12 minuten doet over de beklimming en 17 minuten over de afdaling.

a Bereken zijn gemiddelde snelheid in gehele km/uur over de beklimming. Doe dit ook voor de afdaling.
b Bereken zijn gemiddelde snelheid in gehele km/uur over de beklimming en de afdaling samen.

3 In de figuur hiernaast is de afstand die een wielrenner aflegt uitgezet tegen de tijd.
Er zijn drie lijnstukken getekend die elk behoren bij een gedeelte van de tocht.

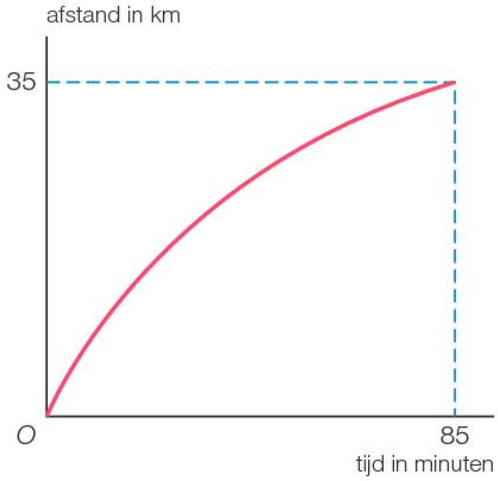
- **a** Hoe kun je in de figuur zien dat er op elk van de drie gedeelten met een constante snelheid is gereden?
- **b** Bereken voor elk van de drie gedeelten de snelheid in km/uur. Rond af op twee decimalen.
- **c** Bereken in km/uur en in m/s de gemiddelde snelheid over het hele traject.



figuur 2.1

4 In de figuur hiernaast is de afstand die een wielrenner aflegt uitgezet tegen de tijd.

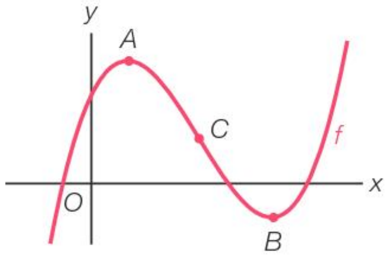
- **a** Hoe kun je in de figuur zien dat er niet met een constante snelheid is gereden?
- **b** Bereken in km/uur de gemiddelde snelheid gedurende deze tocht. Rond af op twee decimalen.
- **c** Wat denk je, is er een tijdstip waarop de snelheid van de wielrenner gelijk is aan de gemiddelde snelheid? Licht toe.



figuur 2.2

2.1 Snelheden

01 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x + 6$. De toppen zijn $A(1, 8\frac{1}{3})$ en $B(5, -2\frac{1}{3})$. Verder zie je het punt $C(3, 3)$.
Tussen A en B daalt de grafiek, maar tussen A en C verloopt de daling anders dan tussen C en B.
Omschrijf dit verschil.



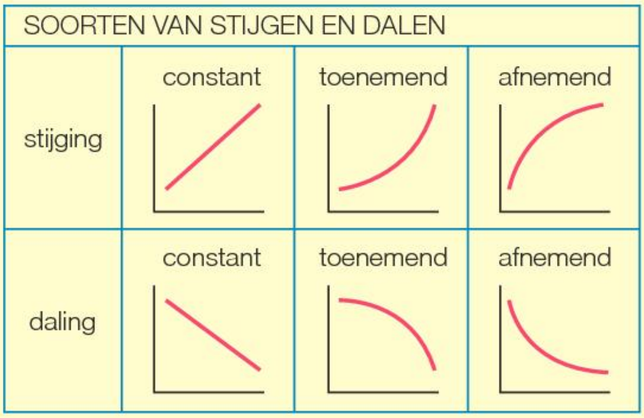
figuur 2.3

Theorie A Soorten van stijgen en dalen

De grafiek in figuur 2.4 is **stijgend** op de intervallen $\langle \leftarrow, 3 \rangle$ en $\langle 6, \rightarrow \rangle$.
De grafiek is **dalend** op het interval $\langle 3, 6 \rangle$.
In figuur 2.4 zijn de volgende soorten van stijgen en dalen te herkennen:
afnemend stijgend op $\langle \leftarrow, 3 \rangle$
toenemend dalend op $\langle 3, 4 \rangle$
afnemend dalend op $\langle 4, 6 \rangle$
toenemend stijgend op $\langle 6, \rightarrow \rangle$.

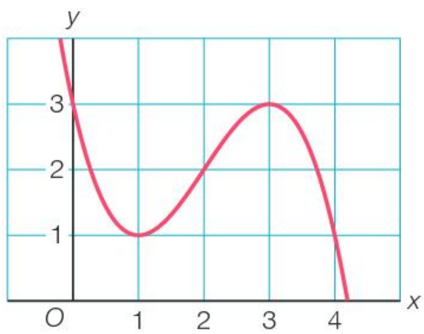
figuur 2.4

Afspraak
Op de vraag op welke intervallen een grafiek stijgend/dalend is, noem je de grootst mogelijke open intervallen.



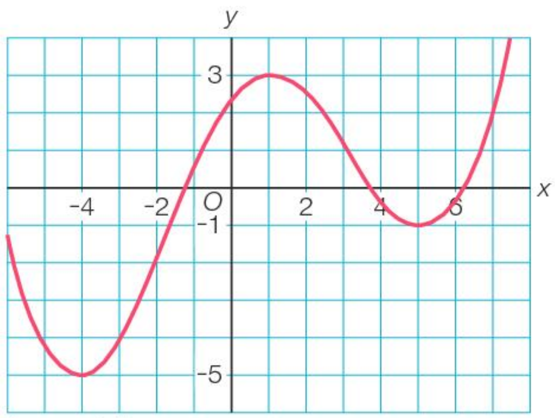
figuur 2.5

2 Welke soorten van stijgen en dalen kun je in figuur 2.6 herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.



figuur 2.6

3 Welke soorten van stijgen en dalen kun je in figuur 2.7 herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.

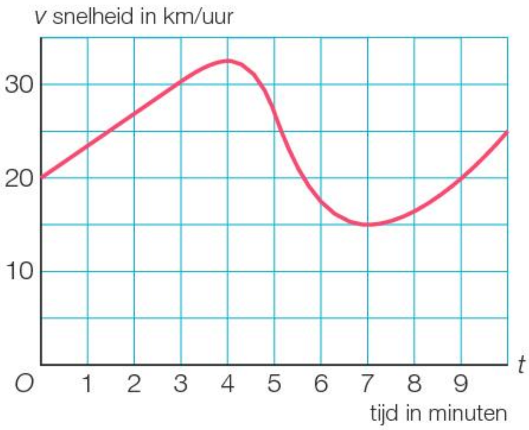


figuur 2.7

4 De grafiek van figuur 2.8 gaat over de snelheid van een fietser tijdens een 10 minuten durende tocht door een glooiend landschap.

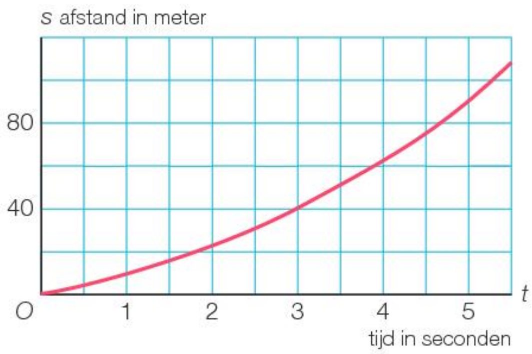
a Welke soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.

b Na hoeveel minuten heeft de fietser tijdens deze tocht te maken met de steilste klim? Licht toe.



figuur 2.8

O5 In figuur 2.9 is van een motorrijder de afgelegde afstand in meter uitgezet tegen de tijd t in seconden.
Bereken de gemiddelde snelheid in m/s van de motorrijder gedurende de eerste vijf seconden.

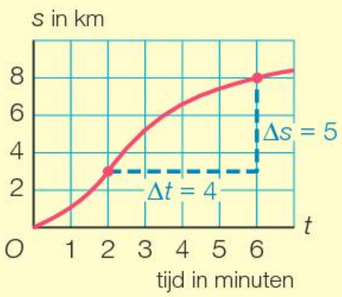


figuur 2.9

Theorie B Gemiddelde snelheid

In figuur 2.10 zie je een **tijd-afstandgrafiek**.
De **gemiddelde snelheid** op het interval [2, 6] is

$$\frac{\text{afgelegde afstand}}{\text{tijd}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{8-3}{6-2} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \text{ km per minuut.}$$



figuur 2.10

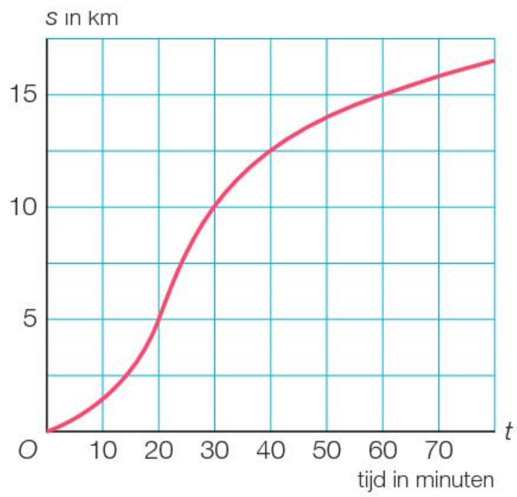
In een tijd-afstandgrafiek is de afgelegde afstand s uitgezet tegen de tijd t.
De gemiddelde snelheid is $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

6 Zie de tijd-afstandgrafiek in figuur 2.11.

a Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur op de intervallen [20, 40] en [30, 60].

b Hoe zie je aan de grafiek dat de snelheid niet constant is?

c Er is een $p \neq 20$ waarbij de gemiddelde snelheid op het interval $[0, p]$ gelijk is aan die op het interval [0, 20]. Voor welke p is dat het geval?

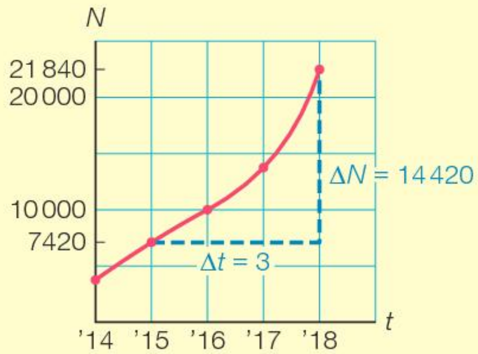


figuur 2.11

R7 Gegeven is een tijd-afstandgrafiek die afnemend stijgend is. Wat kun je zeggen van de gemiddelde snelheid op het interval $[0, t]$ als je t steeds groter neemt?

Theorie C Differentiequotiënten

In figuur 2.12 is het aantal volledig elektrische auto's van Nederland uitgezet tegen de tijd. Je ziet dat tussen 1 januari 2015 en 1 januari 2018 het aantal volledig elektrische auto's is toegenomen van 7420 tot 21 840. De gemiddelde verandering in deze periode is $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{14\,420}{3} \approx 4810$ per jaar.



figuur 2.12

$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ is de gemiddelde verandering van N per tijdseenheid.

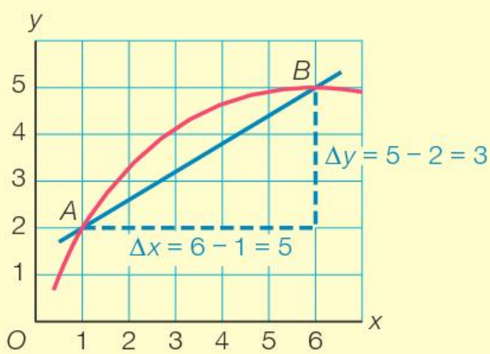
Zie figuur 2.13. Op het interval [1, 6] is $\Delta x = 6 - 1 = 5$ en $\Delta y = 5 - 2 = 3$.

De gemiddelde verandering is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ heet het **differentiequotiënt** van y op het interval [1, 6].

Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is de richtingscoëfficiënt van de lijn AB.

In plaats van 'de richtingscoëfficiënt van de lijn AB' zeggen we ook 'de **helling** van de lijn AB'.



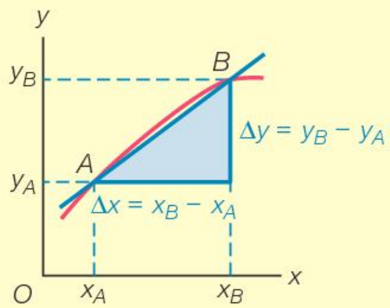
figuur 2.13

Het woord differentiequotiënt kun je als volgt begrijpen.

- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ is een deling, dus een *quotiënt*.
- Onder en boven de breukstreep staan verschillen en een ander woord voor verschil is *differentie*.

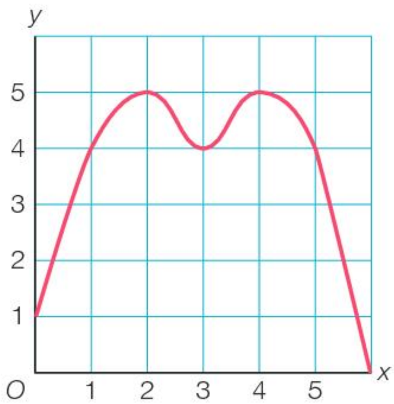
Het differentiequotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ van y op $[x_A, x_B]$ is

- **de gemiddelde verandering van y op $[x_A, x_B]$**
- **de richtingscoëfficiënt van de lijn AB**
- **de helling van de lijn AB**
- $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$



8 [▸ WERKBLAD] Zie figuur 2.14.

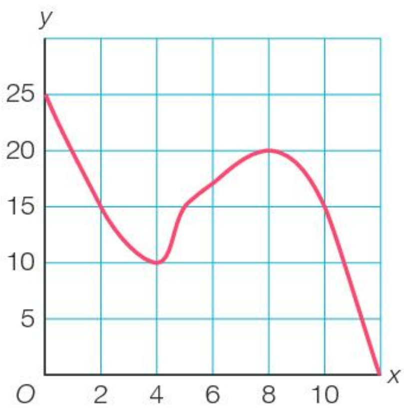
a Bereken de gemiddelde verandering van y op $[0, 4]$.
b Bereken het differentiequotiënt van y op $[2, 6]$.
c Voor welke p is het differentiequotiënt van y op $[0, p]$ gelijk aan 0,6?
d Licht toe dat er drie waarden van q zijn waarvoor het differentiequotiënt van y op $[1, q]$ gelijk is aan $\frac{1}{4}$.



figuur 2.14

A9 [▸ WERKBLAD] Zie figuur 2.15.

a Bereken de gemiddelde verandering van y op $[2, 8]$.
b Bereken het differentiequotiënt van y op $[4, 12]$.
c Hoeveel waarden van p zijn er waarvoor het differentiequotiënt van y op $[2, p]$ gelijk is aan 0,5? Licht toe.
d Voor welke q is het differentiequotiënt van y op $[0, q]$ gelijk aan -1?



figuur 2.15

A10 Bij de grafiek van een functie f met domein [0, 10] en $f(0) = -3$ hoort de volgende tabel.

interval	[0, 1]	[1, 3]	[3, 6]	[6, 10]
differentiequotiënt	4	2	−2	−1

Teken een mogelijke grafiek van f. Waarom zijn er meerdere mogelijkheden?

A11 Van een grafiek is het volgende bekend:

- de grafiek gaat door het punt (0, 2)
- op [0, 2] is het differentiequotiënt $\frac{1}{4}$
- op [0, 5] is het differentiequotiënt $\frac{1}{5}$
- op [1, 3] is het differentiequotiënt $1\frac{1}{2}$
- op [1, 5] is het differentiequotiënt $\frac{1}{2}$.

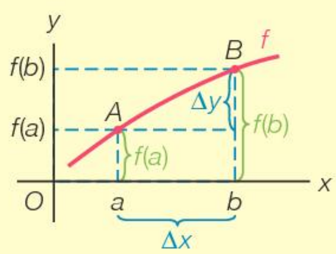
a Teken een mogelijke grafiek.
b Bereken het differentiequotiënt op [3, 5].
c Is het mogelijk dat het differentiequotiënt op [1, 4] gelijk is aan $1\frac{1}{2}$? Licht toe.

O12 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
a Bereken $f(1)$ en $f(5)$ en gebruik dit om het differentiequotiënt van $f(x)$ op [1, 5] te berekenen.
b Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op [0, 4].

Theorie D Differentiequotiënten berekenen bij een functievoorschrift

Weet je van een functie het functievoorschrift, dan kun je differentiequotiënten berekenen. Je hebt daarbij de grafiek niet nodig. Zo is bij de functie $f(x) = x^2$ het differentiequotiënt van $f(x)$ op [−3, 1] gelijk aan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - -3} = \frac{1^2 - (-3)^2}{4} = \frac{-8}{4} = -2$.

Het differentiequotiënt van $f(x)$ op het interval $[a, b]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.



Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 5x - 2$.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op [1, 4].

Uitwerking

Op [1, 4] is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{2 - 2\frac{3}{4}}{3} = -\frac{1}{4}$.

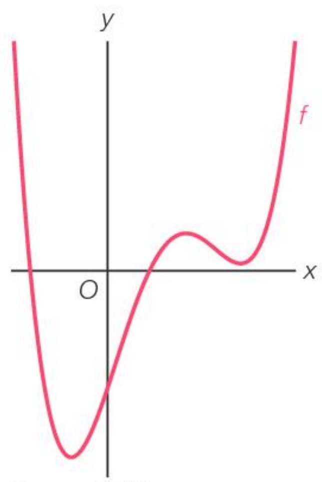
13 Zie het voorbeeld.
- **a** Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = 1$ en $x_B = 4$.
  Stel de formule op van de lijn k door A en B.
- **b** Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op [−2, 6].

14 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 5x + 4$.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op
- **a** [−1, 3]
- **b** [1, 4]
- **c** [−5, −1]
- **d** [−5, 4]

R15 Wat weet je van de differentiequotiënten van een lineaire functie?

16 Gegeven is de functie $f(x) = x^3 - 3x + 5$.
- **a** Schets de grafiek van f.
- **b** Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op [1, 3].
- **c** Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op [−2, 4].
- **d** Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -3$ en $x_B = 1$.
  Stel de formule op van de lijn l door A en B.

A17 Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}4x^4 - 2x^3 + x^2 + 6x - 5$.
- **a** Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op [−1, 1].
- **b** Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op [−2, 2].
- **c** Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = 0$ en $x_B = 3$.
  Bereken de helling van de lijn AB.
- **d** De lijn $y = 2x$ snijdt de grafiek van f in de punten C en D.
  Wat weet je van de helling van de lijn CD?



figuur 2.16

A18 Berry gooit een steen naar beneden. De hoogte van de steen is gegeven door de formule $h = -4{,}9t^2 - 4t + 276$ met h in meter en de tijd t in seconden.

a Vanaf welke hoogte gooit Berry de steen?
b Schets de grafiek van h.
c Bereken na hoeveel seconden de steen op de grond terecht komt. Rond af op één decimaal.
d Hoeveel meter daalt de steen in de derde seconde?
e Bereken de gemiddelde snelheid van de steen gedurende de eerste vier seconden.
f Bereken in m/s de gemiddelde snelheid van de steen gedurende de laatste seconde van de val. Rond af op één decimaal.

A19 Voor elke a is gegeven de functie $f(x) = ax^2 + 4x - 3$.
Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 4]$ is gelijk aan 2.
Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[0, 1]$.

O20 Voor een optrekkende motor is de afgelegde afstand s gegeven door de formule $s = t^3 + t$.
Hierin is s in meter en t de tijd in seconden.

a Bereken in m/s de gemiddelde snelheid op [2, 3].
b Bereken de gemiddelde snelheden op de intervallen [2; 2,1], [2; 2,01] en [2; 2,001].
c In b is de gemiddelde snelheid berekend op een steeds kleiner interval $[2; 2 + \Delta t]$.
Achtereenvolgens was Δt gelijk aan 0,1, 0,01 en 0,001.
Welk vermoeden krijg je over de gemiddelde snelheid als je Δt nog kleiner kiest?
Controleer je vermoeden voor $\Delta t = 0{,}0001$.
d Fred denkt dat je de snelheid op $t = 2$ krijgt door $\Delta t = 0$ te nemen. Licht toe waarom dit mis gaat.

Theorie E Snelheid op één moment

Je hebt geleerd hoe je de gemiddelde snelheid berekent op een gegeven tijdsinterval. Maar hoe krijg je de snelheid op één moment, bijvoorbeeld op $t = 4$?
Je krijgt een benadering van de snelheid op $t = 4$ door de gemiddelde snelheid op een heel klein interval [4, ...], bijvoorbeeld op [4; 4,01] of op [4; 4,001] te berekenen.

Bij de **tijd-afstandformule** $s = \frac{1}{2}t^3$ met s in meter en t in seconden is de gemiddelde snelheid op het interval [4; 4,01] gelijk aan

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4{,}01^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0{,}01} \approx 24{,}060 \text{ m/s.}$$

En op [4; 4,001] is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4{,}001^3 - \frac{1}{2} \cdot 4^3}{0{,}001} \approx 24{,}006$ m/s.
Je krijgt het vermoeden dat de snelheid op $t = 4$ gelijk is aan 24 m/s.

Om de snelheid op $t = 3$ te krijgen, neem je een klein interval $[3, 3 + \Delta t]$, bijvoorbeeld [3; 3,001]. De gemiddelde snelheid op dit interval geeft een goede benadering van de snelheid op $t = 3$.

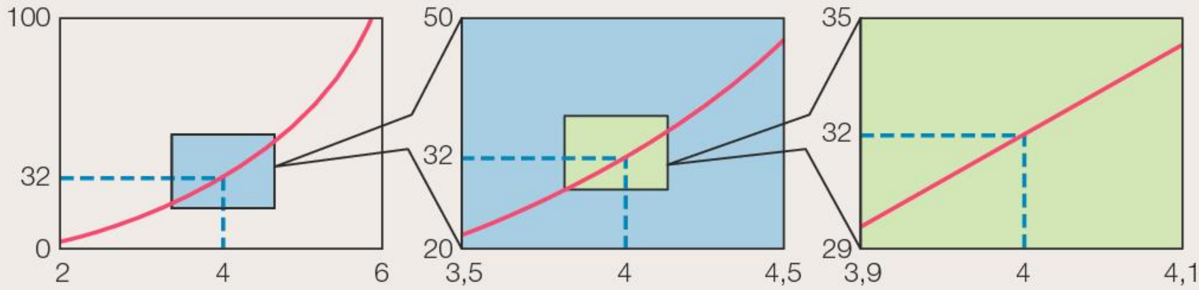
Je krijgt $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3{,}001^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^3}{0{,}001} \approx 13{,}5$ m/s.

Bij een tijd-afstandformule benader je de snelheid op het tijdstip $t = a$ met het differentiequotiënt op het interval $[a, a + \Delta t]$, met bijvoorbeeld $\Delta t = 0{,}01$ of $\Delta t = 0{,}001$.

INFORMATIEF

Inzoomen op de grafiek

In de figuren hieronder is ingezoomd op de grafiek van $s = \frac{1}{2}t^3$.



Hoe verder je inzoomt, hoe meer de grafiek op een rechte lijn gaat lijken. De helling van deze lijn geeft de snelheid op $t = 4$.
Zoom je in op de grafiek bij $t = 3$, dan krijg je de snelheid op $t = 3$.

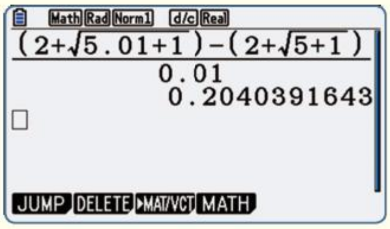
Voorbeeld

Gegeven is de formule $s = 2 + \sqrt{t+1}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Benader in m/s de snelheid op $t = 5$. Neem $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.

Uitwerking
Op [5; 5,01] is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(2 + \sqrt{5{,}01 + 1}\right) - \left(2 + \sqrt{5+1}\right)}{0{,}01} = 0{,}204...$$

De snelheid op $t = 5$ is bij benadering 0,20 m/s.



21 Gegeven is de formule $s = 0{,}4t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Benader in m/s de snelheid op $t = 3$ en op $t = 5$. Neem $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.

22 De afgelegde afstand van een optrekkende auto wordt voor de eerste vijf seconden gegeven door de formule $s = 3{,}5t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Roel zegt dat de auto na 4 seconden een snelheid heeft van 100 km/uur.
Onderzoek of Roel gelijk heeft. Neem $\Delta t = 0{,}01$.

23 Gegeven is de formule $s = 8 - \dfrac{5}{t+2}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Benader in m/s de snelheid op $t = 1$ en op $t = 2$. Neem beide keren $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.

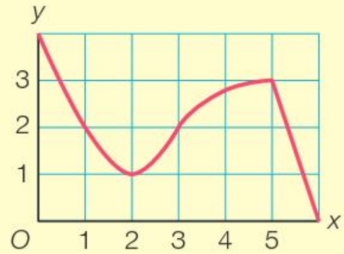
A24 Gegeven is de formule $s = 10\sqrt{4t+1} - 10$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.
Neem in deze opgave $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op twee decimalen.
a Benader in m/s de snelheid op $t = 2$ en op $t = 20$.
b Onderzoek of de snelheid op $t = 11$ gelijk is aan het gemiddelde van de snelheden op $t = 2$ en $t = 20$.

A25 Gegeven is de formule $s = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden met $0 \leq t \leq 6$.
Er is een tijdstip op het interval [0, 6] waarop de snelheid gelijk is aan de gemiddelde snelheid op [0, 6].
Toon dit aan.

Terugblik

Stijgen en dalen

We onderscheiden bij stijgen en dalen drie soorten: constant, afnemend en toenemend.
De grafiek hiernaast is afnemend dalend op $\langle 0, 2\rangle$, toenemend stijgend op $\langle 2, 3\rangle$, afnemend stijgend op $\langle 3, 5\rangle$ en constant dalend op $\langle 5, 6\rangle$.



Differentiequotiënt

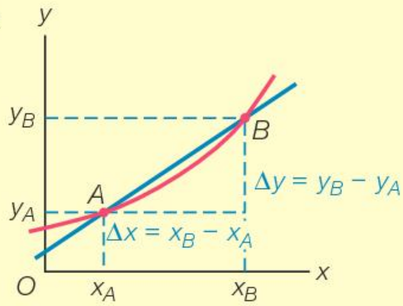
Om veranderingen op intervallen met verschillende lengten te vergelijken, gebruik je differentiequotiënten.

Het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$ is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Het differentiequotiënt is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de lijn AB.

De volgende begrippen komen op hetzelfde neer.

- de gemiddelde toename van y op $[x_A, x_B]$
- het differentiequotiënt van y op $[x_A, x_B]$
- de richtingscoëfficiënt van de lijn AB
- de helling van de lijn AB



Het differentiequotiënt van een functie

Het differentiequotiënt van de functie f op $[a, b]$ is $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

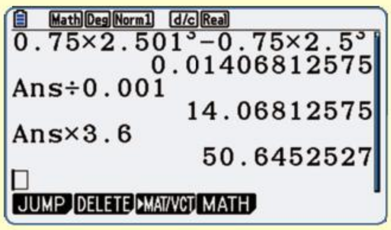
Weet je het functievoorschrift, dan kun je differentiequotiënten berekenen zonder de grafiek te gebruiken.
Zo is het differentiequotiënt van $f(x) = x^2 - 3x$ op $[{}^-1, 2]$ gelijk aan
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(2) - f({}^-1)}{2 - {}^-1} = \dfrac{{}^-2 - 4}{3} = {}^-2$.

Gemiddelde snelheid en snelheid op één moment

Bij een tijd-afstandgrafiek is de afgelegde afstand s uitgezet tegen de tijd t.

Het differentiequotiënt $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ geeft de gemiddelde snelheid.

Door het differentiequotiënt op een klein interval te berekenen, benader je de snelheid op één moment.
Zo benader je de snelheid op $t = 2\frac{1}{2}$ bij de formule $s = \frac{3}{4}t^3$ met s de afstand in meter en t de tijd in seconden bijvoorbeeld door $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(2{,}501) - s(2{,}5)}{0{,}001}$ te berekenen.
Je krijgt 14,068..., dus de snelheid is ongeveer 14,1 m/s en dat is ongeveer 51 km/uur.



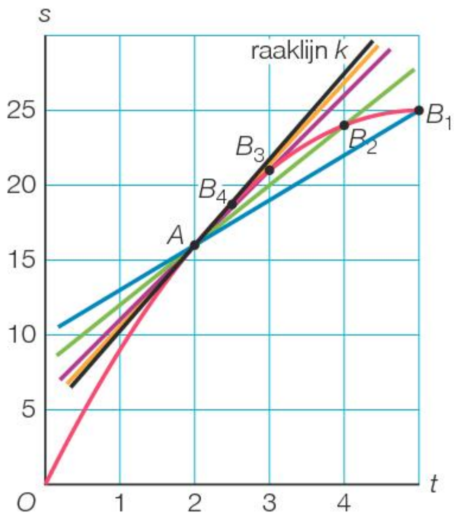
2.2 Raaklijnen en hellinggrafieken

O26 Gegeven is de formule $s = -t^2 + 10t$ met t op [0, 5].
Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden.

a Bereken in m/s de gemiddelde snelheid op de intervallen [2, 5], [2, 4], [2, 3] en [2; 2,5].

In figuur 2.17 is de bijbehorende grafiek getekend.
Ook zijn de lijnen AB_1, AB_2, AB_3 en AB_4 getekend met $A(2, 16)$, $B_1(5, 25)$, $B_2(4, 24)$, $B_3(3, 21)$ en $B_4(2{,}5; 18{,}75)$.

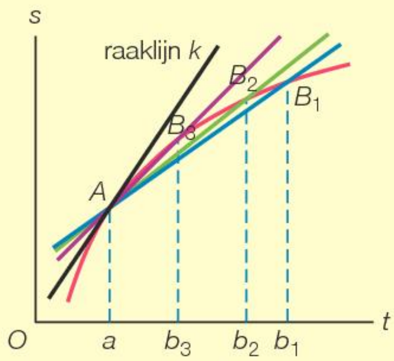
b Bij welke van deze lijnen komt de richtingscoëfficiënt het dichtst in de buurt van de richtingscoëfficiënt van de lijn k die de grafiek van f raakt in A?



figuur 2.17

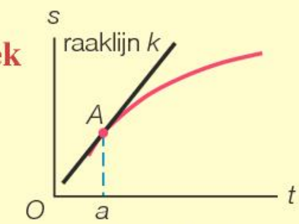
Theorie A Snelheid en richtingscoëfficiënt

In figuur 2.18 zie je een tijd-afstandgrafiek.
Door de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.
De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de richtingscoëfficiënten van de lijnen AB_1, AB_2, AB_3, ...
Hoe dichter B bij A komt te liggen, hoe meer de lijn AB zal lijken op de lijn k die de grafiek in A **raakt**. De lijn k is de **raaklijn** van de grafiek in A.
De snelheid op $t = a$ is dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A.



figuur 2.18

In een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.

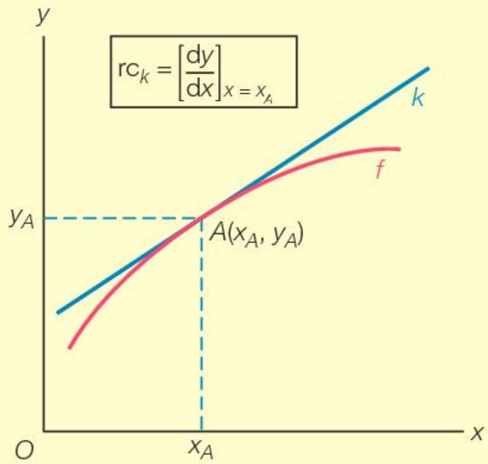


rc_k is de snelheid op $t = a$.

In de [▸ DEMO] **Het tekenen van een raaklijn** wordt uitgelegd hoe je zo goed mogelijk een raaklijn in een punt van een grafiek kunt tekenen.

In figuur 2.19 is de raaklijn k in het punt $A(x_A, y_A)$ getekend. Net als bij een tijd-afstandgrafiek is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = x_A$.
Voor de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A bestaat de notatie $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$.

Spreek uit: d y d x voor x is x a.
In plaats van
de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A
zeggen we ook
de **helling van de grafiek** in het punt A.



figuur 2.19

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ is
- **de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt A**
- **de helling van de grafiek in het punt A**
- **de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.**

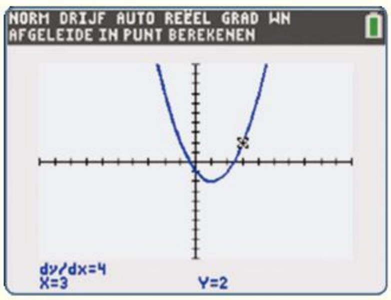
[▶GR] De GR heeft een optie om bij een gegeven formule $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ voor elke x_A te berekenen. Hoe dat gaat leer je in de module **Helling**.

Voorbeeld
De lijn k raakt de grafiek van $f(x) = x^2 - 2x - 1$ in het punt A met $x_A = 3$.
Stel de formule op van k.

Uitwerking
Voer in $y_1 = x^2 - 2x - 1$.
Stel k: $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x + b \\ f(3) = 2, \text{ dus } A(3, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot 3 + b = 2 \\ 12 + b = 2 \\ b = -10 \end{array}$$

Dus k: $y = 4x - 10$.



27

a De lijn k raakt de grafiek van $f(x) = x^2 + x - 2$ in het punt A met $x_A = -1$.
Stel de formule op van k.

b De lijn l raakt de grafiek van $g(x) = \dfrac{2}{x-1} + 3$ in het punt B met $x_B = 3$.
Stel de formule op van l.

28

Gegeven is de functie $f(x) = 1 + \dfrac{5x^2}{x^2+1}$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -2$.
De lijn l raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = 1$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l. Rond af op twee decimalen.

A29

Een auto rijdt weg. Gedurende de eerste vijf seconden wordt de afgelegde afstand s in meter na t seconden gegeven door de formule $s = 1{,}5t^2$.
Na vijf seconden verandert de snelheid niet meer.
Bereken hoeveel meter de auto na tien seconden heeft afgelegd.

Gebruik voor de snelheid op $t = 5$ de notatie $\left[\dfrac{ds}{dt}\right]_{t=5}$.

A30

Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{2x+4}{x-1}$ en $g(x) = \sqrt{9x-2}$.
De grafieken van f en g snijden elkaar in het punt S. De lijn k raakt de grafiek van f in S en de lijn l raakt de grafiek van g in S.
Stel van zowel k als van l de formule op.

A31

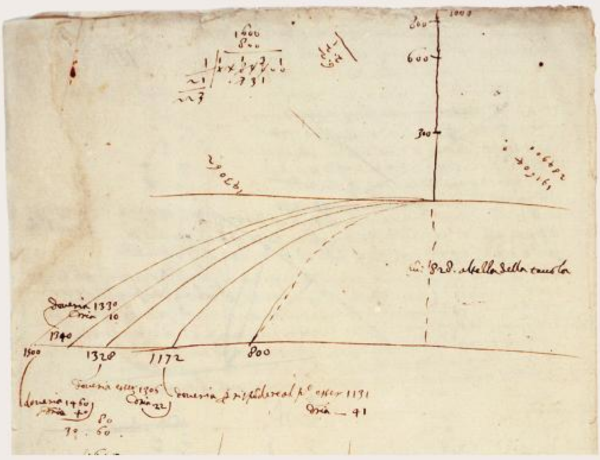
Bij sommige operaties in het onderlichaam krijgt de patiënt als verdoving een zogenaamde ruggenprik (spinale anesthesie). Er wordt dan een verdovend middel in het ruggenmergvocht gespoten.
Het is van belang een zodanige hoeveelheid van het verdovend middel in te spuiten dat de verdoving lang genoeg werkt.
In deze opgave gebruiken we voor de hoeveelheid verdovend middel de formule $H = \dfrac{600t}{4^t}$. Hierin is H in mg en t de tijd in uren met $0 \leq t \leq 2$.
Vanaf $t = 2$ blijft de snelheid waarmee de hoeveelheid verdovend middel afneemt constant.
Bereken voor welke waarde van t het verdovend middel uit het lichaam is verdwenen. Rond af op één decimaal.

GESCHIEDENIS

Galileo Galileï

Galileo Galileï (1564-1642) was de eerste die baanbrekend werk verrichtte met onderzoek op het gebied van snelheid en versnelling. Hierdoor konden later Newton (1642-1727) en Leibniz (1646-1716) hun theorie van de differentiaalrekening ontwikkelen. Bij zijn onderzoek kampte Galileï met het probleem dat er geen eenheid bestond voor snelheid. Volgens de verhoudingsleer van Euclides kon men slechts een verhouding tussen twee grootheden bepalen als deze soortgelijk zijn. Galileï kon dus wel een afstand door een afstand delen, maar niet bijvoorbeeld een afstand door een tijd. Ook nam men aan dat de valsnelheid constant was. Galileï bedacht enkele vernuftige proeven. De benodigde instrumenten maakte hij voornamelijk zelf.

deflector



Galileï toonde aan dat de valsnelheid niet constant is.
Hij liet van verschillende hoogtes een balletje op een deflector vallen. De deflector die op een tafel stond, zorgde ervoor dat de verticale snelheid werd omgebogen in een horizontale snelheid. Het balletje viel daarna 828 punten naar beneden (Galileï werkte met punten: 1 punt ≈ 0,9 mm). Bij het loslaten van het balletje op een hoogte van 300 punten boven de tafel kwam het balletje 800 punten ver. Hij berekende dat de horizontale afstanden bij de hoogtes 600, 800 en 1000 punten gelijk moesten zijn aan 1131, 1306 en 1460 punten. De resultaten van zijn experimenten waren hiermee in overeenstemming.
Galileï ontdekte dat de formule $\text{afstand} = c \cdot \sqrt{\text{hoogte}}$ past bij dit experiment.
Vul je in de formule hoogte 300 en afstand 800 in, dan krijg je $c = \frac{800}{\sqrt{300}} \approx 46{,}2$.
Dit geeft de formule $\text{afstand} = 46{,}2 \cdot \sqrt{\text{hoogte}}$.
Deze formule klopt met de andere gevonden waarden.
In een briefwisseling met de Italiaanse wetenschapper Sarpi (1552-1623) schrijft Galileï dat uit dit resultaat volgt dat de valsnelheid evenredig is met de tijd dat het balletje valt, oftewel $v = c \cdot t$.

032 In figuur 2.20 zie je de grafiek van de functie $f(x) = -x^2 + 4x$.

a Vul in *positief* of *negatief*.
De grafiek is stijgend op $\langle \leftarrow, 2 \rangle$, dus de helling in de bijbehorende punten van de grafiek is ...
De grafiek is dalend op $\langle 2, \rightarrow \rangle$, dus de helling in de bijbehorende punten van de grafiek is ...

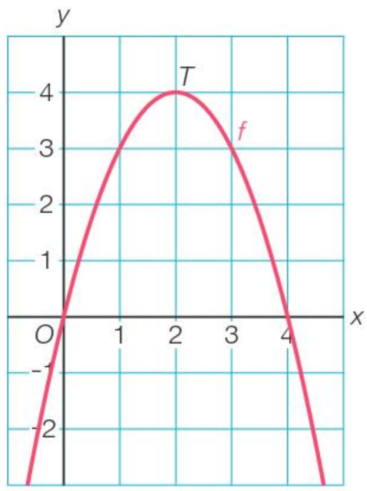
b Wat is de helling van de grafiek in de top T?

c Vul de tabel in. Gebruik de GR.

x-coördinaat	−1	0	1	2	3	4
helling						

d Teken de punten die uit de tabel volgen en teken door deze punten een lijn. Zet *helling* bij de verticale as.

e Wat stelt de lijn die je bij d hebt getekend voor?



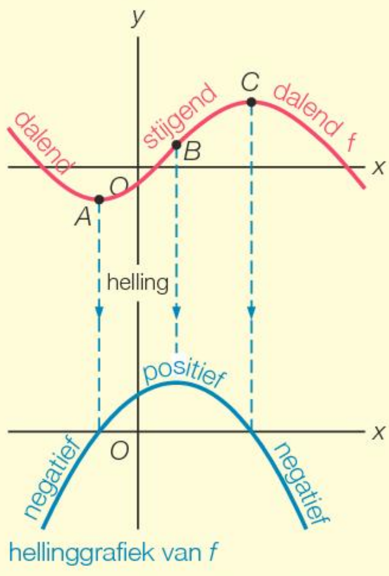
figuur 2.20

Theorie B Hellinggrafiek schetsen

Bij een gegeven functie kun je bij elke x de helling van de grafiek in het bijbehorende punt vinden.
Zo ontstaat een nieuwe functie: de **hellingfunctie**.
De grafiek van de hellingfunctie heet de **hellinggrafiek**.
Uit een gegeven grafiek van f kun je bijzonderheden van de hellinggrafiek afleiden.

- Bij een dalend deel van de grafiek van f horen negatieve hellingen, dus de hellinggrafiek ligt daar onder de x-as.
- In een top van de grafiek van f is de helling nul. De hellinggrafiek snijdt daar de x-as.
- Bij een stijgend deel van de grafiek van f horen positieve hellingen, dus de hellinggrafiek ligt daar boven de x-as.

Bekijk in figuur 2.21 hoe de hellinggrafiek samenhangt met de grafiek van f. Je ziet dat de toppen A en C de snijpunten opleveren van de hellinggrafiek met de x-as.
Tussen A en C stijgt de grafiek van f, dus daar ligt de hellinggrafiek boven de x-as.
In het punt B is de helling maximaal. Dit geeft het hoogste punt van de hellinggrafiek.

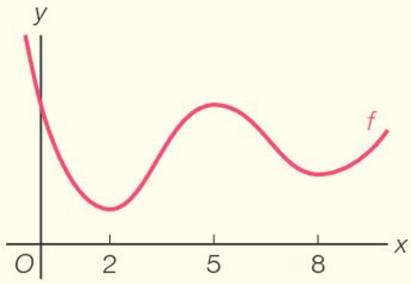


figuur 2.21 De hellinggrafiek van f hangt samen met de grafiek van f.

Het verband tussen grafiek en hellinggrafiek:
- **grafiek stijgend** — **hellinggrafiek boven de x-as**
- **grafiek dalend** — **hellinggrafiek onder de x-as**
- **grafiek heeft top** — **hellinggrafiek snijdt de x-as**

Voorbeeld

Zie figuur 2.22 met de grafiek van een functie f.
Schets de hellinggrafiek van f.



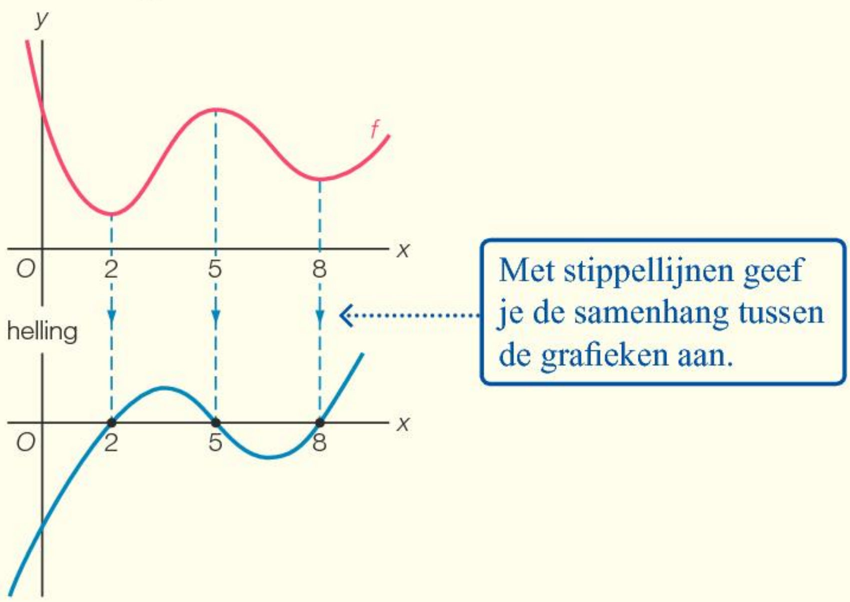
figuur 2.22

Aanpak

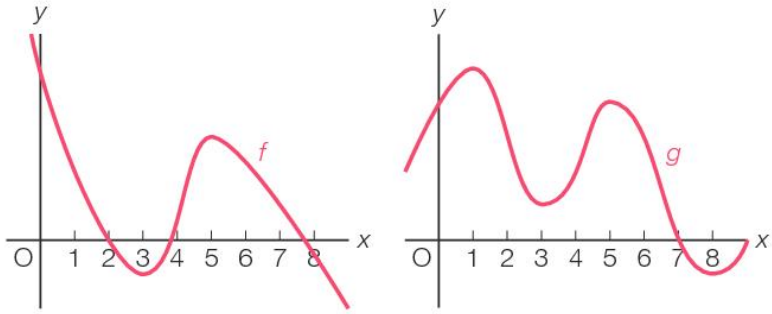
	grafiek van f	hellinggrafiek van f
$\langle \leftarrow, 2 \rangle$	dalend	onder de x-as
$x = 2$	top	snijdt de x-as
$\langle 2, 5 \rangle$	stijgend	boven de x-as
$x = 5$	top	snijdt de x-as
$\langle 5, 8 \rangle$	dalend	onder de x-as
$x = 8$	top	snijdt de x-as
$\langle 8, \rightarrow \rangle$	stijgend	boven de x-as

Teken eerst de punten waar de hellinggrafiek de x-as snijdt. Maak daarna de hellinggrafiek af. Je krijgt een globale grafiek.

Uitwerking



33 [▸ WERKBLAD] Schets de hellinggrafieken van f en g.

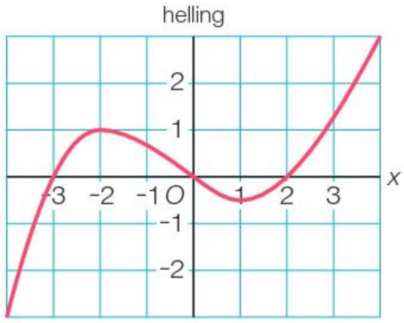


figuur 2.23

R34 Hieronder staan enkele gegevens over de grafiek van een functie f.
Geef aan welke gevolgen deze hebben voor de hellinggrafiek van f.

a De grafiek is toenemend stijgend op $\langle a, b\rangle$.
b De grafiek is afnemend dalend op $\langle c, d\rangle$.
c De grafiek heeft een hoogste punt voor $x = p$.
d De grafiek gaat bij $x = q$ over van toenemend dalend in afnemend dalend.

35 [▸ WERKBLAD] Hiernaast is de hellinggrafiek van de functie f getekend.



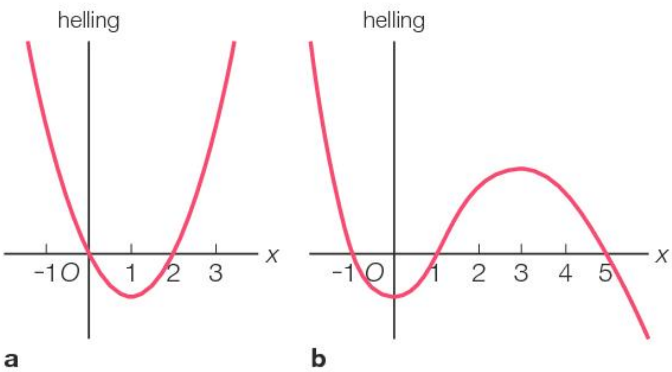
figuur 2.24

a Vul de volgende tabel in. Vul in de middelste kolom in: snijdt de x-as, onder de x-as of boven de x-as en in de rechterkolom: dalend, stijgend of top.

	hellinggrafiek van f	grafiek van f
$\langle\leftarrow, -3\rangle$		
$x = -3$		
$\langle -3, 0\rangle$		
$x = 0$		
$\langle 0, 2\rangle$		
$x = 2$		
$\langle 2, \rightarrow\rangle$		

b Teken een globale grafiek van f.

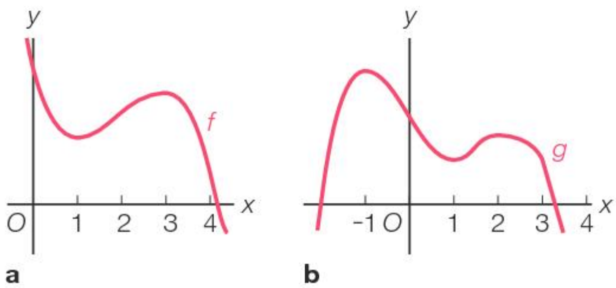
36 [▸ WERKBLAD] In figuur 2.25 zie je twee hellinggrafieken.
Teken globale grafieken van de oorspronkelijke functies.



figuur 2.25

A37 [▸ WERKBLAD] Gegeven zijn de grafieken van de functies f en g in figuur 2.26.

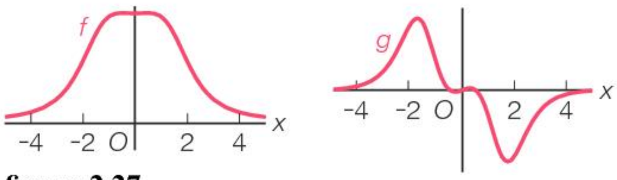
a Schets de hellinggrafiek van f.
b Schets de hellinggrafiek van g.
c Neem aan dat de grafiek van f de hellinggrafiek is van een functie h. Schets een mogelijke grafiek van h.
d Neem aan dat de grafiek van g de hellinggrafiek is van een functie k. Schets een mogelijke grafiek van k.



figuur 2.26

A38 [▸ WERKBLAD] In de figuur hiernaast zie je de grafieken van de functies f en g.
Lars beweert dat de grafiek van g de hellinggrafiek van f is.
Max beweert dat de grafiek van f de hellinggrafiek van g is.

a Wie van de twee heeft gelijk? Licht toe.



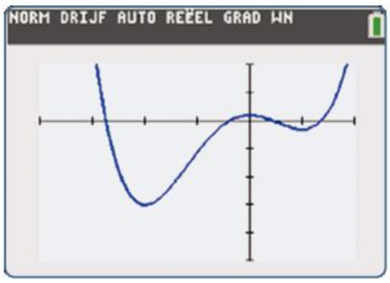
figuur 2.27

Uit het antwoord van vraag a volgt dat van f of van g de hellinggrafiek niet in figuur 2.27 is getekend.

b Teken de ontbrekende hellinggrafiek.

39 Gegeven is de functie $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2$.

a Bereken de coördinaten van de toppen van de grafiek van f.
b Schets de hellinggrafiek van f.
c Op de hellinggrafiek ligt het punt $P(-1, a)$. Bereken a.
d Bereken de x-coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de x-as. Rond af op één decimaal.
e De grafiek van f is de hellinggrafiek van een functie g. Teken een globale grafiek van g.



figuur 2.28

A40 Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}1x^3 + x^2 - 6$.

a Schets de hellinggrafiek van f.
b De grafiek van f is de hellinggrafiek van een functie g. Teken een globale grafiek van g.

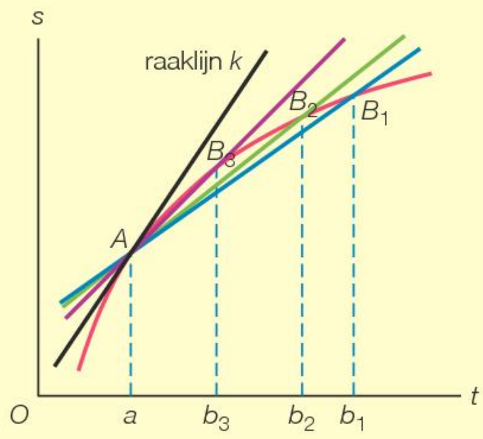
A41 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2 - 4x + 5$ en $g(x) = x^2 - 4x - 5$.

a Schets de hellinggrafiek van f en schets de hellinggrafiek van g.
b De hellinggrafiek van f is ook de hellinggrafiek van een functie h. De grafiek van h gaat door het punt $A(3, 4)$. Stel de formule op van h.

Terugblik

Snelheid op $t = a$ en raaklijn

Door bij een tijd-afstandgrafiek de gemiddelde snelheden op de steeds kleinere intervallen $[a, b_1]$, $[a, b_2]$, $[a, b_3]$, ... te berekenen, krijg je een steeds betere benadering van de snelheid op $t = a$.
De gemiddelde snelheden zijn gelijk aan de hellingen van de lijnen AB_1, AB_2, AB_3, ...
Hoe dichter B bij A komt te liggen, des te meer de lijn AB gaat lijken op de lijn k die in A de grafiek raakt.
Bij een tijd-afstandgrafiek is de snelheid op $t = a$ gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het bijbehorende punt.



Snelheid en richtingscoëfficiënt

Op de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$ ligt het punt $A(2, 3)$.
De formule van de raaklijn k in A krijg je als volgt.
Voer in $y_1 = -\frac{1}{2}x^2 + 5$.
Stel k: $y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ A(2, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 2 + b = 3 \\ -4 + b = 3 \\ b = 7 \end{array}$$

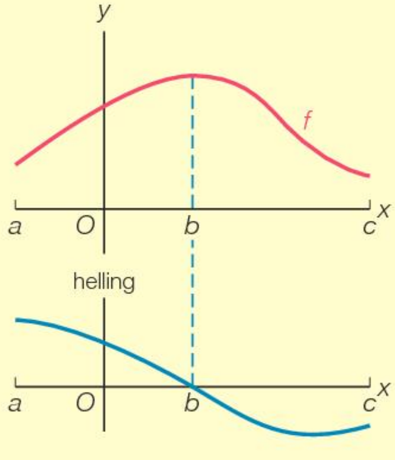
Dus k: $y = -2x + 7$.

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_A}$ is
- de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in A
- de helling van de grafiek in A
- de snelheid waarmee y verandert voor $x = x_A$.

Hellinggrafieken schetsen

Bij een functie f hoort een hellingfunctie die voor elke x de waarde geeft van de helling van de grafiek van f in het bijbehorende punt.
De grafiek van de hellingfunctie heet de hellinggrafiek van f.
Bij een gegeven grafiek van een functie f kun je de hellinggrafiek schetsen.
Je gebruikt:

	grafiek van f	hellinggrafiek
$\langle a, b \rangle$	stijgend	boven de x-as
$x = b$	top	snijdt de x-as
$\langle b, c \rangle$	dalend	onder de x-as



2.3 Limiet en afgeleide

O42 Gegeven zijn de functies $f(x) = 3x$ en $g(x) = 4$.

a De hellinggrafiek van f is een horizontale lijn. Geef daar een verklaring voor en geef de formule van de hellingfunctie van f.

b Geef de formule van de hellingfunctie van g.

O43 Gegeven is de functie $f(x) = x^2$.

a Vul de tabel hiernaast in.

b Stel op grond van de tabel de formule op van de hellinggrafiek en controleer deze formule door bij nog enkele x-waarden de helling te berekenen.

x	-2	-1	0	1	2
helling					

Theorie A De afgeleide functie

Bij een functie f hoort een hellingfunctie. In plaats van hellingfunctie wordt meestal de naam **afgeleide functie**, kortweg **afgeleide**, gebruikt. De afgeleide van f wordt genoteerd als f'.

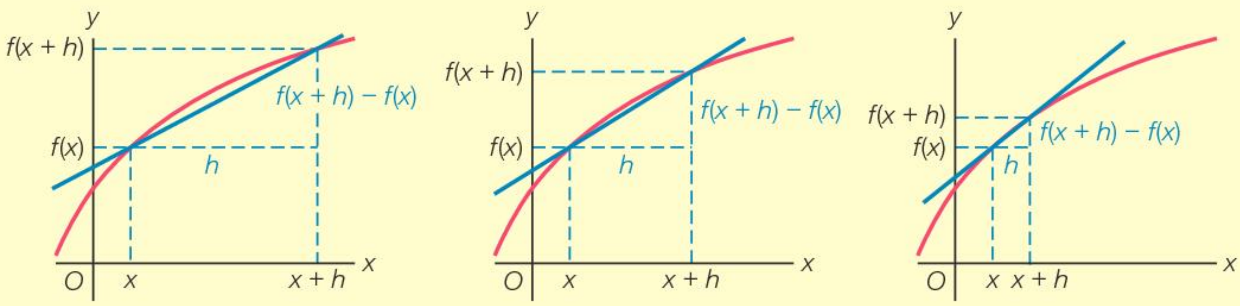
Spreek f' uit als f accent.

De afgeleide van een functie f geeft voor elke x
- **de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek van f in het bijbehorende punt**
- **de helling van de grafiek van f in het bijbehorende punt.**

Om de formule van de afgeleide van een functie f te vinden, kijken we naar het differentiequotiënt van $f(x)$ op het interval $[x, x + h]$, dus naar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Neem je op het interval $[x, x + h]$ de waarde van h heel klein, dan geeft $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ een goede benadering van de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek van f in het bijbehorende punt.



figuur 2.29 Door h steeds kleiner te nemen, krijg je een raaklijn van de grafiek van f.

De grenswaarde van $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ voor h naar 0 is de afgeleide $f'(x)$.

Notatie: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$.

Uitspraak: limiet voor h naar 0 van ...

Dus om de formule van de afgeleide f' te vinden, bereken je $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Lim is de afkorting van limiet. Het Latijnse limes betekent grens.

De afgeleide is de limiet van het differentiequotiënt.

Definitie van de afgeleide

De afgeleide f' van een functie f is $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = 0{,}6x^2$.

a Bereken $f'(3)$ met behulp van een limiet.

b Toon aan dat $f'(x) = 1{,}2x$.

Uitwerking

a
$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0{,}6(3+h)^2 - 0{,}6 \cdot 3^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{0{,}6(9+6h+h^2) - 5{,}4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5{,}4 + 3{,}6h + 0{,}6h^2 - 5{,}4}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3{,}6h + 0{,}6h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(3{,}6+0{,}6h)}{h} = \lim_{h \to 0}(3{,}6+0{,}6h) = 3{,}6$$

b
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{0{,}6(x+h)^2 - 0{,}6x^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{0{,}6(x^2+2xh+h^2) - 0{,}6x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0{,}6x^2 + 1{,}2xh + 0{,}6h^2 - 0{,}6x^2}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1{,}2xh + 0{,}6h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(1{,}2x+0{,}6h)}{h} = \lim_{h \to 0}(1{,}2x+0{,}6h) = 1{,}2x$$

R44 Zie voorbeeld a.

a Waarom kun je niet $h = 0$ nemen bij $\frac{3{,}6h + 0{,}6h^2}{h}$?

b Licht de stap $\lim\limits_{h \to 0}(3{,}6+0{,}6h) = 3{,}6$ toe.

45 Gegeven is de functie $f(x) = 1\frac{1}{2}x^2$.

a Bereken $f'(4)$ met behulp van een limiet.

b Toon aan dat $f'(x) = 3x$.

A46 Gegeven is de functie $f(x) = x^2 - 4x$.
- **a** Bereken $f'(3)$ met behulp van een limiet.
- **b** Toon aan dat $f'(x) = 2x - 4$.

Theorie B Differentieerregels bewijzen

Het berekenen van de afgeleide heet **differentiëren**.
Met de definitie van de afgeleide zijn regels voor het differentiëren te bewijzen.

Voorbeeld

Bewijs $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$.

Uitwerking

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

47
- **a** Bewijs $f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$.
- **b** Bewijs $f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$.

48 Er geldt $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$.
- **a** Toon dit aan.
- **b** Bewijs $f(x) = x^3$ geeft $f'(x) = 3x^2$.

49 In deze opgave ga je de regels
$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot f'(x)$ en
$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ bewijzen.
De tweede regel staat bekend als de **somregel voor het differentiëren**.
Neem over en vul in.

- **a** $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$\lim_{h \to 0} \frac{c \cdot g(x+h) - c \cdot g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c \cdot (...)}{h} = c \cdot \lim_{h \to 0} \frac{...}{...} = c \cdot g'(x)$$

- **b** $s(x) = f(x) + g(x)$ geeft

$$s'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{s(x+h) - s(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{...}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{...}{h} + \frac{...}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = ...$$

O50

a Uit de regels $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$ en $f(x) = x^2$ geeft $f'(x) = 2x$ volgt dat $h(x) = 10x^2$ geeft $h'(x) = 20x$.
Licht dit toe.

b De afgeleide van $h(x) = 5x^2 + 6x + 4$ is $h'(x) = 10x + 6$.
Uit welke regels volgt dit?

Theorie C Differentiëren

In de voorgaande opgaven heb je een aantal regels voor het differentiëren bewezen.
De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = n\,x^{n-1}$ geldt voor $n = 2, 3, 4 \ldots$
In het voorbeeld op de vorige bladzijde staat het bewijs voor $n = 2$, in opgave 48b gaf je het bewijs voor $n = 3$.
Het bewijs voor $n = 4$ gaat als volgt.
Hierbij gebruiken we het resultaat van opgave 48a.

$$\begin{aligned}(x+h)^4 &= (x+h)(x+h)^3\\ &= (x+h)(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3)\\ &= x^4 + 3x^3h + 3x^2h^2 + xh^3 + x^3h + 3x^2h^2 + 3xh^3 + h^4\\ &= x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x) = x^4 \text{ geeft } f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3\end{aligned}$$

Door op deze manier door te gaan, kun je vinden dat de regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ ook geldt voor $n = 5, 6, 7, \ldots$

Uit $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ en
$g(x) = c \cdot f(x)$ geeft $g'(x) = c \cdot f'(x)$ volgt
$h(x) = ax^n$ geeft $h'(x) = a \cdot nx^{n-1}$.

We zetten de gevonden **regels voor het differentiëren** op een rij.

$f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$
$f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$
$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ voor $n = 2, 3, 4, \ldots$
$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ somregel

De regel $f(x) = x^n$ geeft $f'(x) = nx^{n-1}$ geldt zelfs voor iedere waarde van n. Het bewijs hiervan volgt later.

nieuwe exponent 1 minder

$f(x) = 4x^3$ geeft $f'(x) = 4 \cdot 3x^2$

oude exponent ervoor

Om de afgeleide van $f(x) = 6x^5 + 5x^2 - 6x + 8$ te berekenen, neem je term voor term de afgeleide. Dus $f'(x) = 6 \cdot 5x^4 + 5 \cdot 2x - 6 = 30x^4 + 10x - 6$.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = -5x^7 + 2x^4 - x - 9$
b $g(x) = (3x^4 - 1)(5x^2 + 2)$
c $h(t) = 2t^3 - 4t^2 + 3t - 2$

Uitwerking

a $f(x) = -5x^7 + 2x^4 - x - 9$ geeft $f'(x) = -35x^6 + 8x^3 - 1$
b $g(x) = (3x^4 - 1)(5x^2 + 2) = 15x^6 + 6x^4 - 5x^2 - 2$ geeft $g'(x) = 90x^5 + 24x^3 - 10x$
c $h(t) = 2t^3 - 4t^2 + 3t - 2$ geeft $h'(t) = 6t^2 - 8t + 3$

R51 Uit welke regels voor het differentiëren volgt de **verschilregel** $v(x) = f(x) - g(x)$ geeft $v'(x) = f'(x) - g'(x)$?

52 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 5x^6 - 3x^5 + 2x - 7$
b $g(x) = -2x^8 - 4x^4 + 7{,}2$
c $h(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$
d $k(q) = 1 + 3q - 3q^2 - 5q^7$

53 Differentieer.

a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x)$
b $g(x) = (3x + 6)^2 - 8x$
c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(2x - 1)$
d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 9x) - 8(x - 7)$

A54 Differentieer.

a $f(x) = (3x - 1)(x^2 + 5x)$
b $g(x) = (3x^3 - 1)^2$
c $h(x) = (5x^5 - 3)(3x - 2)$
d $k(x) = 5 - 3(x^4 - x)(x + 1)$
e $l(t) = (5t^3 - t)(3t^5 + t)$
f $m(q) = 1 - (3q^2 - 2)^2$

A55 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 5$.
a Bereken de formule van de hellinggrafiek.
b Bereken algebraïsch de helling voor $x = 4$.
c Bereken algebraïsch voor welke x de helling van de grafiek van f gelijk is aan -1.

A56 De helling van de grafiek van $f(x) = ax^4 - 3x^2 + 2ax$ in het punt A met $x_A = 2$ is gelijk aan 5.
Bereken a.

A57 De regel $f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ is een voorbeeld van de algemene regel $f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$, waarbij c een constante is.
Gegeven is dat van de functie $h(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ de afgeleide $h'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ is.
Bereken de afgeleide van de functie $k(x) = \frac{4x-2}{3x+3}$.

E58 De lineaire functie $g(x) = 6x + 12$ is de afgeleide van een functie h.
De grafiek van h gaat door het punt $(-3, -4)$.
Stel het functievoorschrift op van h.

GESCHIEDENIS

Johannes Hudde (1628-1704)

Johannes Hudde was een veelzijdig man met grote belangstelling voor wiskunde, natuurkunde, techniek en sterrenkunde. Het grootste deel van zijn leven was hij burgemeester van Amsterdam.
Bekend is Huddes methode om toppen te bepalen van grafieken van functies met gehele machten van x, zoals bijvoorbeeld $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$. De door hem bedachte methode wordt de regel van Hudde genoemd.
Hudde gebruikte hierbij onbewust de afgeleide van dit soort functies. Het toepassen van de regel op de functie $f(x) = 2x^3 - 6x + 5$ leidt tot het oplossen van de vergelijking $6x^2 - 6 = 0$, dus tot het oplossen van $f'(x) = 0$.
De oplossingen $x = -1$ en $x = 1$ zijn de x-coördinaten van de toppen van de grafiek van f.

Terugblik

Afgeleide functie

In plaats van de hellingfunctie van f zeggen we meestal de afgeleide (functie) van f. Notatie f'.

Het differentiequotiënt van de functie f op het interval $[x, x + h]$ is
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
Per definitie is de afgeleide f' van f gelijk aan de limiet voor h naar nul van het differentiequotiënt, dus $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

De formule van de afgeleide berekenen met de definitie

Met de definitie van de afgeleide is bij een gegeven functievoorschrift de formule van de afgeleide te berekenen. Bij $f(x) = 3x^2$ krijg je

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) - 3x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6x + 3h)}{h} = \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x.$$

Dus $f(x) = 3x^2$ geeft $f'(x) = 6x$.

Regels voor het differentiëren

Het berekenen van de afgeleide heet differentiëren.
Met de definitie van de afgeleide zijn de volgende regels voor het differentiëren bewezen.
$f(x) = a$ geeft $f'(x) = 0$
$f(x) = ax$ geeft $f'(x) = a$
$f(x) = ax^n$ geeft $f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$ voor $n = 2, 3, 4, ...$
$f(x) = c \cdot g(x)$ geeft $f'(x) = c \cdot g'(x)$
$s(x) = f(x) + g(x)$ geeft $s'(x) = f'(x) + g'(x)$ somregel
$v(x) = f(x) - g(x)$ geeft $v'(x) = f'(x) - g'(x)$ verschilregel

Met behulp van deze regels kun je de afgeleide van de functie $f(x) = 5x^3 - 7x^2 + 8$ berekenen. Je krijgt $f'(x) = 15x^2 - 14x$.

Om de afgeleide van de functie $g(x) = 5(3x - 1)(x^3 - 4x)$ te berekenen, werk je eerst de haakjes weg.
$g(x) = 5(3x - 1)(x^3 - 4x) = 5(3x^4 - 12x^2 - x^3 + 4x)$
$= 15x^4 - 60x^2 - 5x^3 + 20x = 15x^4 - 5x^3 - 60x^2 + 20x$
Dit geeft $g'(x) = 60x^3 - 15x^2 - 120x + 20$.

2.4 Toepassingen van de afgeleide

O59 Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x - 7$ en $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a Bereken $p'(x)$, $f'(x)$ en $g'(x)$.

b Onderzoek of $p'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$.

c Laat zien dat $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Theorie A De productregel

Het product van de functies f en g is de functie $p(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Om de functie p te differentiëren, gebruik je de **productregel voor het differentiëren**:

$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

afgeleide eerste maal tweede plus eerste maal afgeleide tweede

In het volgende voorbeeld wordt de afgeleide van de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 2x + 3)$ met de productregel berekend.
Bij deze functie kun je f' ook berekenen door eerst de haakjes weg te werken. Later kom je echter functies tegen waarbij dit niet mogelijk is.
Het gebruik van de productregel is dan noodzakelijk.
In het voorbeeld komt de notatie $[x^2 - 4]'$ voor. Hiermee wordt de afgeleide van $x^2 - 4$ bedoeld. Dus $[x^2 - 4]' = 2x$.

Voorbeeld

Bereken de afgeleide van $f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 2x + 3)$.
Gebruik de productregel.

Uitwerking

$f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 2x + 3)$ geeft

$$f'(x) = [x^2 - 4]' \cdot (x^3 + 2x + 3) + (x^2 - 4) \cdot [x^3 + 2x + 3]'$$
$$= 2x(x^3 + 2x + 3) + (x^2 - 4)(3x^2 + 2)$$

$g(x) = x^3 + 2x + 3$ geeft $g'(x) = 3x^2 + 2$ wordt ook genoteerd als $[x^3 + 2x + 3]' = 3x^2 + 2$.

60 Bereken met de productregel de afgeleide van de volgende functies.
Laat in het antwoord de haakjes staan.

a $f(x) = (2 - 3x^2)(2 + 7x)$

b $g(x) = (2x - 5)^2$

c $h(x) = (x^2 - 3x)(x^3 + x^2 + x)$

d $j(x) = (3x^2 - 4)^2$

61 *
Je weet $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$. Hieruit volgt $[\sqrt{x}]' \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot [\sqrt{x}]' = 1$.

a Licht dit toe en bereken de afgeleide van $f(x) = \sqrt{x}$.

b Bereken op dezelfde manier de afgeleide van $g(x) = \sqrt{2x - 1}$ en $h(x) = \sqrt{x^2 - x}$.

R62

a De functie $p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ is te schrijven als $p(x) = j(x) \cdot h(x)$ waarbij $j(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Toon door herhaald gebruik van de productregel aan dat $p = fgh$ geeft $p' = f'gh + fg'h + fgh'$.

b De functie p is het product van de functies f, g, h en j, dus $p(x) = f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) \cdot j(x)$.
Geef de formule van p'.

De productregel in het kort is $[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

A63
Gegeven is de functie $q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$.
Kruislings vermenigvuldigen geeft $q(x) \cdot n(x) = t(x)$.

a Differentieer beide leden, gebruik voor het linkerlid de productregel.

b Toon aan dat uit a volgt $q'(x) = \dfrac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$.

c Gebruik $q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ om $q'(x) = \dfrac{t'(x) - q(x) \cdot n'(x)}{n(x)}$ te herleiden tot $q'(x) = \dfrac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$.

INFORMATIEF

Het bewijs van de productregel

Bij het bewijs van de productregel gebruik je $p'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{p(x+h) - p(x)}{h}$.

$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft

$$p'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) \overbrace{- f(x) \cdot g(x+h)}^{\text{eraf}} \overbrace{+ f(x) \cdot g(x+h)}^{\text{erbij}} - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Theorie B De quotiëntregel

Het quotiënt van de functies $t(x) = 2x^2 + 1$ en $n(x) = 3x + 5$ is de functie
$q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)} = \dfrac{2x^2 + 1}{3x + 5}$.

Om de afgeleide van q te berekenen, gebruik je de **quotiëntregel voor het differentiëren**. Deze regel heb je in opgave 63 bewezen.

De quotiëntregel in het kort is $\left[\dfrac{t}{n}\right]' = \dfrac{nt' - tn'}{n^2}$.

$$q(x) = \frac{t(x)}{n(x)} \text{ geeft } q'(x) = \frac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$$

Om de quotiëntregel makkelijk te kunnen onthouden, kun je hem als volgt schrijven.

$$\left[\frac{t}{n}\right]' = \frac{n \cdot at - t \cdot an}{n^2} = \frac{\text{nat min tan}}{n^2}.$$

$n \cdot at$ betekent noemer maal afgeleide teller.
$t \cdot an$ betekent teller maal afgeleide noemer.

$$\text{Dus } q(x) = \frac{2x^2 + 1}{3x + 5} \text{ geeft } q'(x) = \frac{\overbrace{(3x + 5)}^{n} \cdot \overbrace{[2x^2 + 1]'}^{t'} - \overbrace{(2x^2 + 1)}^{t} \cdot \overbrace{[3x + 5]'}^{n'}}{\underbrace{(3x + 5)^2}_{n^2}} =$$

$$\frac{(3x + 5) \cdot 4x - (2x^2 + 1) \cdot 3}{(3x + 5)^2} = \frac{12x^2 + 20x - 6x^2 - 3}{(3x + 5)^2} = \frac{6x^2 + 20x - 3}{(3x + 5)^2}$$

Werk alleen in de teller de haakjes weg.

Voorbeeld

Differentieer.

a $f(x) = \dfrac{3}{2x^2 + 1}$ **b** $g(x) = \dfrac{2x + 1}{3x - 1}$

Uitwerking

a $f(x) = \dfrac{3}{2x^2 + 1}$ geeft $f'(x) = \dfrac{(2x^2 + 1) \cdot 0 - 3 \cdot 4x}{(2x^2 + 1)^2} = \dfrac{-12x}{(2x^2 + 1)^2}$

b $g(x) = \dfrac{2x + 1}{3x - 1}$ geeft $g'(x) = \dfrac{(3x - 1) \cdot 2 - (2x + 1) \cdot 3}{(3x - 1)^2} = \dfrac{6x - 2 - 6x - 3}{(3x - 1)^2} = \dfrac{-5}{(3x - 1)^2}$

64 Differentieer.

a $f(x) = \dfrac{x-2}{x+5}$

b $f(x) = \dfrac{2}{2x-1}$

c $f(x) = \dfrac{x^3}{2x^2+1}$

d $f(x) = \dfrac{x-2}{3-x^2}$

e $f(x) = \dfrac{3-x^2}{x-2} + x^3$

f $f(x) = x - \dfrac{2}{x+4}$

O65 Op de grafiek van $f(x) = x^2 - 3x - 1$ ligt het punt A met $x_A = 4$.

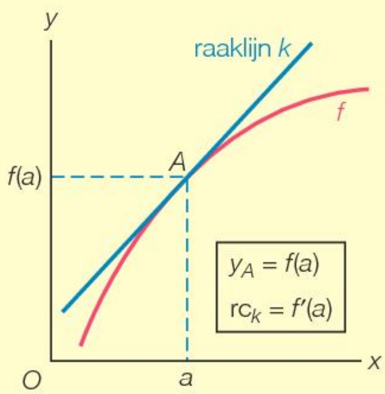
a Bereken $f'(x)$, $f'(4)$ en $f(4)$.

b Floris wil y_A weten. Is dat $f'(4)$ of $f(4)$?

c Bastiaan wil de helling in A weten. Is dat $f'(4)$ of $f(4)$?

Theorie C Raaklijn en afgeleide

Voor het opstellen van de formule van een raaklijn heb je de optie $\dfrac{dy}{dx}$ gebruikt om de richtingscoëfficiënt te berekenen.
Je kunt nu ook met de afgeleide de richtingscoëfficiënt van de raaklijn berekenen. Je gebruikt dan dat $f'(a)$ de richtingscoëfficiënt van de raaklijn van de grafiek in het punt $(a, f(a))$ is.



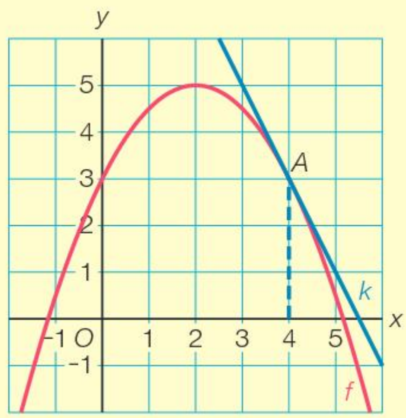
Op de grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ ligt het punt A met $x_A = 4$. Zie figuur 2.30.

Je krijgt y_A door $f(4)$ te berekenen.
$f(4) = 3$, dus $A(4, 3)$.

Met $f'(4)$ krijg je de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k in A.
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ geeft $f'(x) = -x + 2$,
dus $rc_k = f'(4) = -4 + 2 = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = -2x + b \\ \text{door } A(4, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 3 \\ -8 + b = 3 \\ b = 11 \end{array}$$

Dus $k\colon y = -2x + 11$.



figuur 2.30 De lijn k raakt de grafiek van f in A.
$y_A = f(4)$ en $rc_k = f'(4)$.

Je hebt op deze manier *met behulp van de afgeleide* de formule van de raaklijn opgesteld. We zeggen ook dat je de formule van de raaklijn *algebraïsch* hebt opgesteld of *langs algebraïsche weg* of *met behulp van differentiëren*.

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x + 3$.
Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = -2$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn k in P.

Uitwerking

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x + 3$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}x^2 - 4$
Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(-2) = 1\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 4 = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + b \\ f(-2) = 7, \text{ dus } P(-2, 7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -2 + b = 7 \\ -4 + b = 7 \\ b = 11 \end{array}$$

Dus k: $y = 2x + 11$.

66 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 2$.

a Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = 4$.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn k in A.

b Op de grafiek van f ligt het punt B met $x_B = -2$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn m in B.

67 Gegeven is de functie $g(x) = 2x^2 - 6x$.

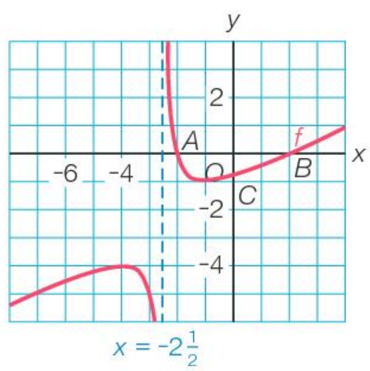
a Het punt A met $x_A = -3$ ligt op de grafiek van g.
Stel met behulp van differentiëren de formule op van de raaklijn l in A.

b De grafiek van g snijdt de x-as behalve in de oorsprong ook nog in het punt P.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn n in P.

68 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}$.

a De grafiek van f snijdt de x-as in de punten $A(-2, 0)$ en $B(2, 0)$.
Stel langs algebraïsche weg vergelijkingen op van de raaklijnen k en l in A en B.

b De grafiek van f snijdt de y-as in het punt C.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn m in C.



figuur 2.31

A69 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 4}$.

De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A en de x-as in het punt B.
Onderzoek langs algebraïsche weg of de volgende bewering waar is.
De raaklijn k in A snijdt de grafiek in B.

A70 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$.

a De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -3$.
Stel met behulp van differentiëren een vergelijking van k op.

b De grafiek van f snijdt de y-as in het punt B.
Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn l in B.

c De grafiek van f snijdt de x-as in drie punten. Het snijpunt met de positieve x-coördinaat is C.
Stel algebraïsch de formule op van de raaklijn m in C.

A71 * Voor elke $a \neq 0$ is gegeven de functie $f(x) = x^3 + ax^2 + a^2x$ en het punt A met $x_A = a$ op de grafiek van f.
De lijn k raakt de grafiek van f in A.
Stel de formule op van k.

O72 * Gegeven zijn de functie $f(x) = x^2 - 2x - 5$ en de lijnen $y = 4x - 6$, $y = 4x - 10$, $y = 4x - 14$ en $y = 4x - 18$.

a Plot de grafiek van f en de vier lijnen.

Een van de gegeven lijnen raakt de grafiek van f in het punt R.

b Welke lijn is dit?

c Wat weet je van $f'(x_R)$?

Theorie D Raaklijn met gegeven richtingscoëfficiënt

In figuur 2.32 zie je de grafiek van de functie $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Verder is een aantal evenwijdige lijnen met richtingscoëfficiënt 2 getekend. Eén van deze lijnen raakt de grafiek van f in het punt A.
Om de coördinaten van A te berekenen, gebruik je dat de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in A gelijk is aan 2, dus $f'(x_A) = 2$.
Om x_A te berekenen, los je dus de vergelijking $f'(x) = 2$ op.
Algebraïsch gaat dat als volgt.

$f(x) = x^2 - 3x + 1$ geeft $f'(x) = 2x - 3$

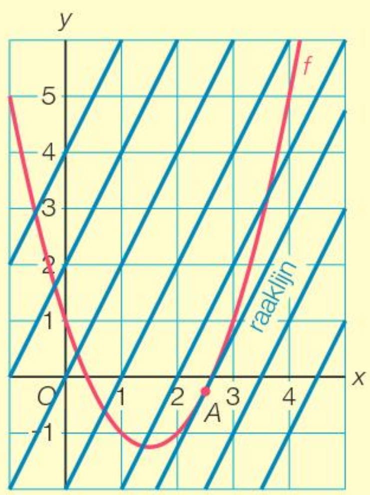
$f'(x) = 2$ geeft $2x - 3 = 2$

$2x = 5$

$x = 2\frac{1}{2}$

Dus $x_A = 2\frac{1}{2}$ en $y_A = f(2\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

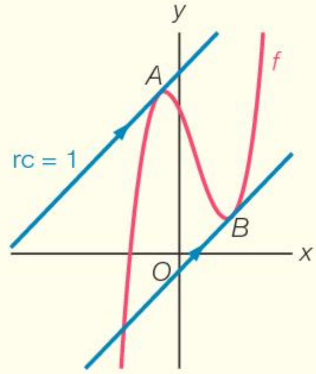
Dus $A(2\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.



figuur 2.32

Voorbeeld

Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 8$.
In de punten A en B van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 1.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B.



figuur 2.33

Uitwerking

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 8$ geeft $f'(x) = x^2 - 2x - 2$

$f'(x) = 1$ geeft $x^2 - 2x - 2 = 1$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1 \vee x = 3$

$x_A = -1$ en $y_A = f(-1) = 8\frac{2}{3}$, dus $A(-1, 8\frac{2}{3})$.

$x_B = 3$ en $y_B = f(3) = 2$, dus $B(3, 2)$.

73 Gegeven is de functie $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

a In het punt A van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 4.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A.

b Op de grafiek van f ligt het punt B waarin de raaklijn k evenwijdig is met de lijn l: $y = -6x + 8$.
Bereken met behulp van de afgeleide de coördinaten van B.

74 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 10x + 6$.

a In de punten A en B van de grafiek van f is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk aan 2.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B.

b In de punten C en D van de grafiek van f is de raaklijn evenwijdig met de lijn k: $y = 10x + 2$.
Bereken algebraïsch de x-coördinaten van C en D.

A75 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$.

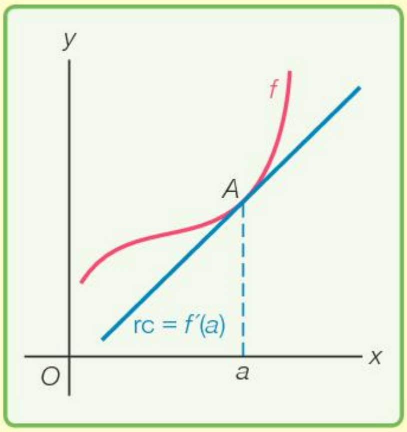
a Op de grafiek van f ligt het punt P met $x_P = 4$.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in P.

b Zowel in het punt Q als in het punt R op de grafiek van f is de raaklijn evenwijdig met de lijn l: $y = 3x + 6$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van Q en R.

A76 Voor welke waarden van p heeft de grafiek van $f_p(x) = x^3 + px^2 + 2x - 3$ twee raaklijnen met richtingscoëfficiënt -1?

Theorie E Snelheid en afgeleide

Je hebt geleerd dat de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = a$ gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(a, f(a))$. En deze richtingscoëfficiënt, dus de snelheid, is $f'(a)$.
Je berekent de snelheid dus met de afgeleide.



$f'(a)$ is de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = a$.

We gaan dit toepassen op een tijd-afstandformule.
Is de afgelegde afstand s in meter na t seconden gegeven door de formule $s = 2t^2 + 4t$, dan is de formule van de snelheid $s' = 4t + 4$.
Het is gebruikelijk de snelheid aan te geven met v.
Dus bij $s = 2t^2 + 4t$ is $v = 4t + 4$.
Op $t = 5$ is de snelheid gelijk aan $v = 4 \cdot 5 + 4 = 24$ m/s.

77 Een auto trekt op. Gedurende de eerste zes seconden is de afgelegde afstand s in meter te berekenen met de formule $s = 0{,}8t^2$. Hierbij is t de tijd in seconden. Na zes seconden verandert de snelheid niet meer.
- **a** Bereken algebraïsch de snelheid na drie en na zes seconden.
- **b** Bereken na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 30 km/uur. Rond af op twee decimalen.
- **c** Hoeveel meter legt de auto in de eerste tien seconden af?

A78 Een keeper schopt een bal vanuit zijn handen verticaal omhoog. De hoogte h in meter is te berekenen met de formule $h = -5t^2 + 28t + 0{,}6$. Hierbij is t de tijd in seconden.
- **a** Hoeveel seconden duurt het voordat de bal op de grond komt? Rond af op één decimaal.
- **b** Bereken met behulp van de afgeleide de snelheid waarmee de bal op de grond komt. Geef het antwoord in gehele km/uur.
- **c** Wat weet je van de snelheid van de bal als deze het hoogste punt heeft bereikt? Na hoeveel seconden is dat het geval?

GESCHIEDENIS

Differentiaalrekening

In de differentiaalrekening, waarmee je in dit hoofdstuk kennis hebt gemaakt, bestudeert men veranderingen van functies. Daarbij spelen begrippen als snelheid, helling van een grafiek en raaklijn van een grafiek een grote rol.
Het heeft lang geduurd voor men het begrip snelheid wist te doorgronden.
De beroemde geleerden Isaac Newton (1642-1727) en Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) hebben onafhankelijk van elkaar de differentiaalrekening ontwikkeld.

Newton geldt als de grootste en invloedrijkste wetenschapper aller tijden. In zijn belangrijkste werk, de 'Principia Mathematica' uit 1687, zet hij de wiskundige beginselen van de natuurwetenschappen uiteen. Hij verklaart in dit boek hoe het zonnestelsel in elkaar zit en legt er de wetten van de zwaartekracht en de bewegingsleer (mechanica) in vast.
Newton werd geboren op 25 december 1642 in Lincolnshire in Engeland. Zijn vader stierf al voor zijn geboorte. Zijn moeder liet hem over aan de zorgen van zijn grootmoeder.
Al vroeg werd duidelijk dat hij voor het werk thuis op de boerderij ongeschikt was. Hij had er geen belangstelling voor en verdiepte zich geheel in lezen en knutselen.
Newton schreef in 1671 een verhandeling over raaklijnen, maar deze werd pas negen jaar na zijn dood gepubliceerd.

Newton

Leibniz wordt gezien als een van de meest invloedrijke figuren in de westerse cultuur. Behalve aan wiskunde leverde hij ook belangrijke bijdragen aan filosofie, fysica, geologie, rechten, geschiedenis en geneeskunde. Hij was actief als politicus en raadsheer aan het hof van Hannover bij hertog Johann Friedrich. Hij ontwierp nieuwe soorten rijtuigen en drainagesystemen voor de mijnen in de Harz. Ook bedacht hij een manier om fosfor te produceren en was hij de uitvinder van de eerste rekenmachine die in staat was op te tellen, af te trekken, te vermenigvuldigen en te delen. In 1684 publiceerde hij het eerste artikel over de differentiaalrekening. Veel van de huidige notaties in de wiskunde zijn van hem afkomstig.

Leibniz

De vraag wie de ontdekker is van de differentiaalrekening heeft heel wat twistgesprekken opgeleverd. Terwijl de Engelsen Newton als de ontdekker beschouwden, ging men er in Duitsland vanuit dat dit Leibniz was. Deze vete heeft zelfs bijna een oorlog veroorzaakt tussen Engeland en Duitsland.

Terugblik

De productregel en de quotiëntregel

Voor het differentiëren van het product van twee functies gebruik je de productregel:

$$[f \cdot g]' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$p(x) = f(x) \cdot g(x)$ geeft $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
Bij $f(x) = (x^2 + x)(2x^2 - x)$ krijg je
$$f'(x) = [x^2 + x]' \cdot (2x^2 - x) + (x^2 + x) \cdot [2x^2 - x]'$$
$$= (2x + 1)(2x^2 - x) + (x^2 + x)(4x - 1).$$

Voor het differentiëren van het quotiënt van twee functies gebruik je de quotiëntregel:

$$\left[\frac{t}{n}\right]' = \frac{nt' - tn'}{n^2}.$$

$q(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ geeft $q'(x) = \dfrac{n(x) \cdot t'(x) - t(x) \cdot n'(x)}{(n(x))^2}$.

Bij $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{2x^2 - 1}$ krijg je

$$f'(x) = \frac{(2x^2 - 1) \cdot [x^2 + x]' - (x^2 + x) \cdot [2x^2 - 1]'}{(2x^2 - 1)^2} = \frac{(2x^2 - 1) \cdot (2x + 1) - (x^2 + x) \cdot 4x}{(2x^2 - 1)^2}$$
$$= \frac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 1 - 4x^3 - 4x^2}{(2x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 1}{(2x^2 - 1)^2}.$$

Raaklijn en afgeleide

Bij het opstellen van de formule van de raaklijn k met behulp van de afgeleide gebruik je dat voor een punt A op de grafiek van f geldt: $f'(x_A)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn k in het punt A.
Bij $f(x) = -x^2 + 5x + 2$ en $x_A = 4$ krijg je $f'(x) = -2x + 5$, dus $\text{rc}_k = f'(4) = -2 \cdot 4 + 5 = -3$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ f(4) = 6, \text{ dus } A(4, 6) \end{array}\right\} -3 \cdot 4 + b = 6 \text{ en dit geeft } b = 18$$

Dus k: $y = -3x + 18$.

Raaklijn met gegeven richtingscoëfficiënt

De coördinaten van het punt B op de grafiek van $f(x) = -x^2 + 5x + 2$ waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan -7, bereken je als volgt.
De richtingscoëfficiënt is -7, dus $f'(x) = -7$ en dit geeft $-2x + 5 = -7$.
Hieruit volgt $x = 6$, dus $B(6, -4)$.

Snelheid en afgeleide

$f'(a)$ is de snelheid waarmee $f(x)$ verandert voor $x = a$.
Is de afgelegde afstand s in meter na t seconden gegeven door $s = 1{,}2t^2 + 0{,}8t$, dan is de formule van de snelheid $v = s' = 2{,}4t + 0{,}8$.
Na drie seconden is de afgelegde afstand $s = 1{,}2 \cdot 3^2 + 0{,}8 \cdot 3 = 13{,}2$ m en de snelheid $v = 2{,}4 \cdot 3 + 0{,}8 = 8$ m/s.
Verandert de snelheid na $t = 3$ niet meer, dan is de afgelegde afstand op $t = 10$ gelijk aan $13{,}2 + 7 \cdot 8 = 69{,}2$ m.

Eindopdracht Hartslagfrequentie en snelheid

In de beginopdracht van dit hoofdstuk heb je snelheden benaderd bij de formule $F = \dfrac{135t + 50}{0{,}3t^2 + 1}$. In deze formule is F de hartslagfrequentie van een atleet in slagen per minuut bij een zware inspanning en t de tijd in minuten vanaf de aanvang van de zware inspanning.
Het benaderen van de snelheid deed je door de gemiddelde verandering te berekenen op een klein tijdsinterval. Zo benaderde je de snelheid op $t = 0{,}5$ door de gemiddelde verandering te berekenen op het tijdsinterval $[0{,}49; 0{,}51]$.
In dit hoofdstuk heb je geleerd dat je de snelheid waarmee F verandert ook met de optie $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ kunt berekenen.

- Bereken met de optie $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ de snelheid waarmee F verandert op $t = 0{,}5$. Geef het antwoord in aantal slagen per minuut per seconde.

Je kunt ook de afgeleide berekenen van de formule $F = \dfrac{135t + 50}{0{,}3t^2 + 1}$.
Je krijgt dan de formule van de snelheid waarmee F verandert.

- Bereken met de formule van de afgeleide van F de snelheid waarmee F verandert op $t = 2{,}5$. Geef het antwoord in aantal slagen per minuut per seconde en rond af op twee decimalen.

De formule $F_{\text{atleet}} = \dfrac{135t + 50}{0{,}3t^2 + 1}$ hoort bij een krachtsinspanning van anderhalve minuut van een atleet.
Bij de krachtsinspanning van een wielrenner heeft men een soortgelijke formule opgesteld. Deze formule is $F_{\text{wielrenner}} = \dfrac{162t + 60}{0{,}3t^2 + 1}$.

We vergelijken de snelheden waarmee de hartslagfrequentie afneemt van de atleet en van de wielrenner op het moment dat de hartslagfrequentie van de atleet afgenomen is tot 120 slagen per minuut en van de wielrenner tot $120k$ slagen per minuut.

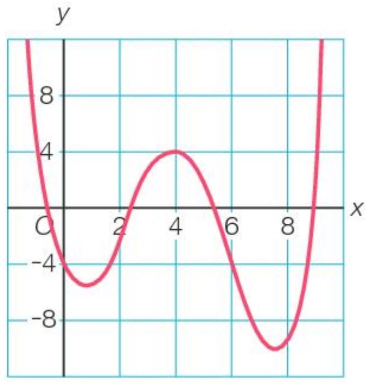
- Onderzoek of de snelheid waarmee de hartslagfrequentie van de wielrenner afneemt op dat moment k keer zo groot is als die van de atleet.

Diagnostische toets

2.1 Snelheden

1 [▸ WERKBLAD] Zie figuur 2.34.

a Welke soorten van stijgen en dalen kun je in de figuur herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.
b Bereken de gemiddelde verandering van y op $[1, 4]$.
c Bereken het differentiequotiënt van y op $[2, 6]$.
d Hoeveel waarden van p zijn er waarvoor het differentiequotiënt van y op $[0, p]$ gelijk is aan 1? Licht toe.



figuur 2.34

2 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 2x$.

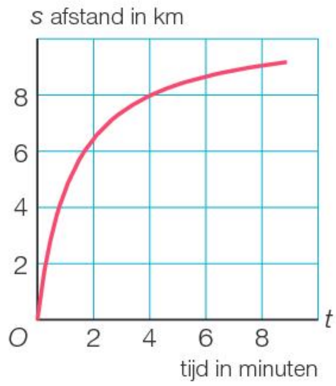
a Bereken de gemiddelde verandering van $f(x)$ op $[1, 4]$.
b Bereken het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[-1, 1]$.
c Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -2$ en $x_B = 3$. Stel de formule op van de lijn l door A en B.

3 [▸ WERKBLAD] Gegeven is de tijd-afstandgrafiek in figuur 2.35.

a Bereken de gemiddelde snelheid in km/uur op $[1, 9]$.
b Er is een interval $[1, p]$ waarop de gemiddelde snelheid gelijk is aan die op het interval $[0, 9]$. Voor welke p is dat het geval?

Bij de grafiek hoort de formule $s = 10 - \dfrac{10}{t+1}$.

c Benader in km/uur de snelheid op $t = 1$. Neem $\Delta t = 0{,}01$ en rond af op gehelen.



figuur 2.35

2.2 Raaklijnen en hellinggrafieken

4 Gegeven is de functie $f(x) = \sqrt{10 - x^2}$. Op de grafiek van f liggen de punten A en B met $x_A = -3$ en $x_B = 3$. De lijn k raakt de grafiek in A en de lijn l raakt de grafiek in B.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

5 Een auto rijdt weg. Gedurende de eerste zes seconden wordt de afgelegde afstand s in meter gegeven door de formule $s = -\frac{1}{4}t^3 + 3t^2$. Hierin is t in seconden. Na zes seconden verandert de snelheid niet meer.

a Bereken de snelheid op $t = 2$.
b Hoeveel meter heeft de auto na tien seconden afgelegd?

6 [▸ WERKBLAD] Zie de grafiek van f in figuur 2.36.

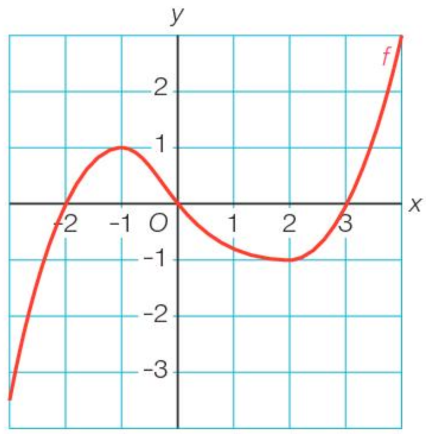
a Schets de hellinggrafiek van f.

b De grafiek is de hellinggrafiek van een functie g. Teken een globale grafiek van g.

7 Gegeven is de functie $f(x) = -0{,}2x^3 + x^2 - 2$.

a Schets de hellinggrafiek van f.

b De grafiek van f is de hellinggrafiek van een functie g. Teken een globale grafiek van g.



figuur 2.36

2.3 Limiet en afgeleide

8 Gegeven is de functie $f(x) = 5x^2 + 4$.

a Bereken $f'(3)$ met behulp van een limiet.

b Toon met behulp van de definitie van de afgeleide aan dat $f'(x) = 10x$.

9 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = 0{,}6x^3 - 1{,}3x^2 + 7$

b $g(p) = 4p^3 + p^2 - 11p + 20$

c $h(x) = x(2x - 1)^2$

d $k(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2(x - 4) + 6$

10 De helling van de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3px + 1$ in het punt A met $x_A = 2$ is gelijk aan p.
Bereken p.

2.4 Toepassingen van de afgeleide

11 Bereken met de productregel de afgeleide. Laat in het antwoord de haakjes staan.

a $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 7x + 2)$

b $g(x) = (x^3 + 2x + 1)^2$

12 Differentieer.

a $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3x - 1}$

b $g(x) = \dfrac{x^4}{x^2 + 1}$

c $h(x) = x^2 - \dfrac{3}{x + 1}$

13 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.

a Stel langs algebraïsche weg de formule op van k.

b Stel met behulp van de afgeleide de formule op van de raaklijn l in het snijpunt van de grafiek van f met de y-as.

14 Op de grafiek van de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 2$ liggen de punten A en B waarin de raaklijn evenwijdig is met de lijn k: $y = 2x - 5$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B.

3

Meetkunde

Wat leer je?

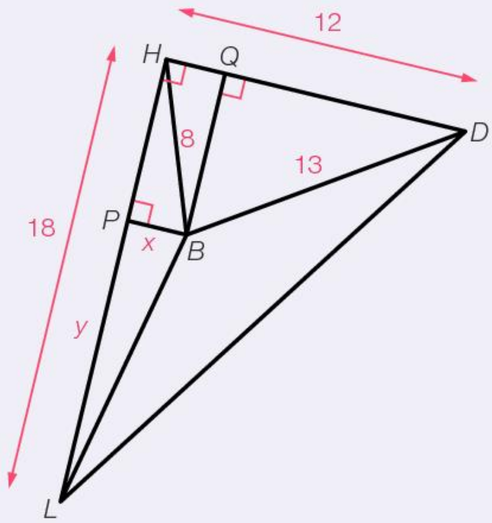
- Rekenen met goniometrische verhoudingen en gelijkvormige driehoeken.
- Enkele stellingen over cirkels bewijzen en gebruiken.
- Lengten en oppervlakten berekenen.
- Vergelijkingen gebruiken bij meetkundige figuren.
- Berekeningen maken met de sinusregel en de cosinusregel.

Beginopdracht Afstanden in het Friese land

Vanaf de zesde eeuw voor Christus vestigden mensen zich in het Fries-Groningse kweldergebied. Door hoge waterstanden werden deze bewoners gedwongen hun huizen op terpen te bouwen. De hoogste terp van Nederland bevindt zich in Hegebeintum. Het dorp Hegebeintum (ca. 90 inwoners) ligt hemelsbreed 18 km van Leeuwarden, 12 km van Dokkum en 8 km van Bartlehiem. De afstand tussen Dokkum en Bartlehiem is 13 km. Zie de kaart hiernaast. De hoek bij Hegebeintum is 90°.

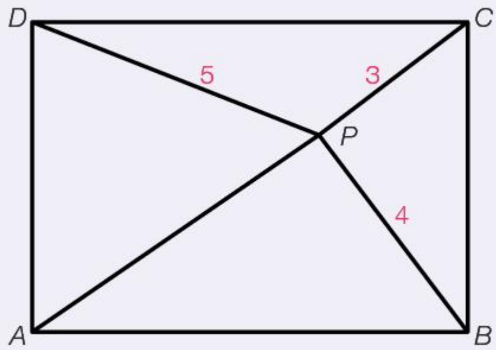
- Waardoor is het gehucht Bartlehiem (ca. 70 inwoners) bekend?

Met bovenstaande gegevens kun je de afstand tussen Leeuwarden en Bartlehiem berekenen. In de figuur hiernaast zie je hoe je dit kunt aanpakken. In driehoek *HDL* zijn de loodlijnen *BP* en *BQ* getekend. We stellen $BP = x$ en $LP = y$ en gaan daarmee *BL* berekenen.
Je kunt nu afleiden dat $(18 - y)^2 = 64 - x^2$ en $(18 - y)^2 = 169 - (12 - x)^2$.



- Toon dit aan en laat zien dat hieruit volgt dat $x = 1{,}625$.
- Bereken *y* en de afstand tussen Leeuwarden en Bartlehiem.

In de figuur hiernaast is de rechthoek *ABCD* getekend. Binnen de rechthoek ligt het punt *P* zo, dat $BP = 4$, $CP = 3$ en $DP = 5$.

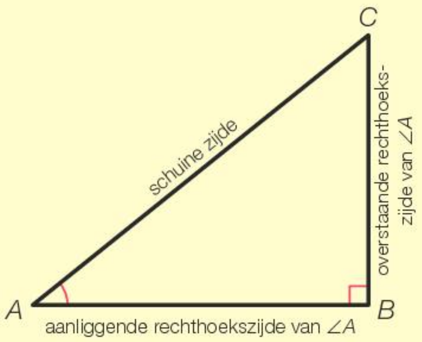


- Bereken exact de lengte van *AP*.

Voorkennis Goniometrische verhoudingen

Theorie A Hoeken berekenen

Bij hoekberekeningen in rechthoekige driehoeken gebruik je de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens.



figuur 3.1 De schuine zijde zit altijd tegenover de rechte hoek.

Sinus, cosinus en tangens

$$\sin(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{BC}{AC}$$

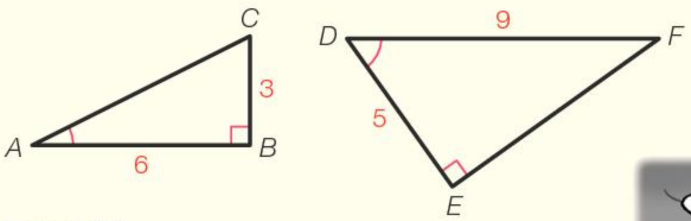
$$\cos(\angle A) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A}{\text{schuine zijde}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde van } \angle A}{\text{aanliggende rechthoekszijde van } \angle A} = \frac{BC}{AB}$$

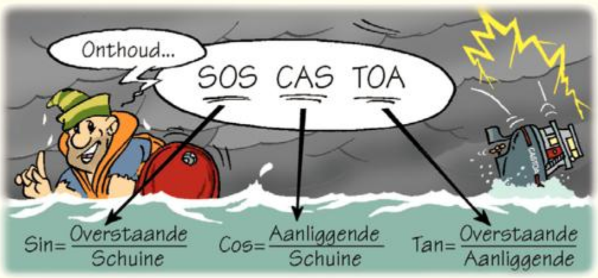
Om de GR te kunnen gebruiken bij hoekberekeningen moet je deze instellen op graden. Op de TI gaat dat in het MODE-menu waar je voor GRADEN kiest. Bij de Casio kies je in het SET UP-menu bij Angle voor Deg. Bij de HP kies je in de Settings voor Graden.

Voorbeeld

Bereken de hoeken die met een boogje zijn aangegeven. Rond af op één decimaal.



figuur 3.2

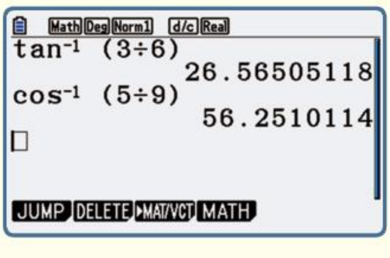


Aanpak
Ga eerst na of je sinus, cosinus of tangens nodig hebt.

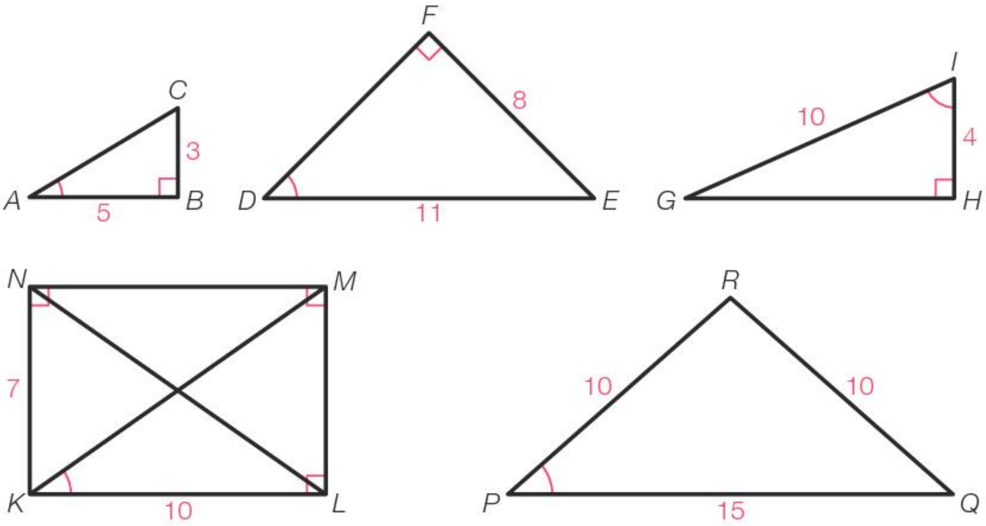
Uitwerking

$\tan(\angle A) = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{3}{6}$ geeft $\angle A \approx 26{,}6°$

$\cos(\angle D) = \dfrac{DE}{DF} = \dfrac{5}{9}$ geeft $\angle D \approx 56{,}3°$



1 Bereken de hoeken die met een boogje zijn aangegeven. Rond af op één decimaal.



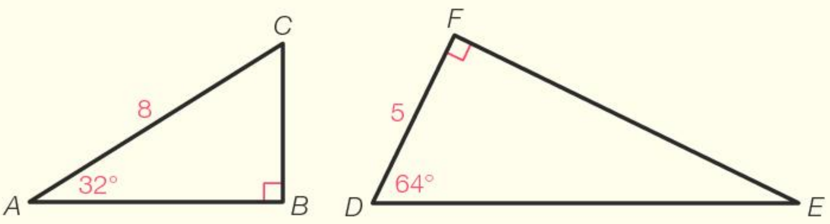
figuur 3.3

Theorie B Lijnstukken berekenen

In het voorbeeld zie je hoe je lijnstukken berekent met behulp van de sinus, cosinus of tangens.

Voorbeeld

Bereken BC en DE. Rond af op één decimaal.



figuur 3.4

Aanpak

Ga eerst na of je sinus, cosinus of tangens nodig hebt.

Uitwerking

$\sin(\angle A) = \dfrac{BC}{AC}$

$\sin(32°) = \dfrac{BC}{8}$

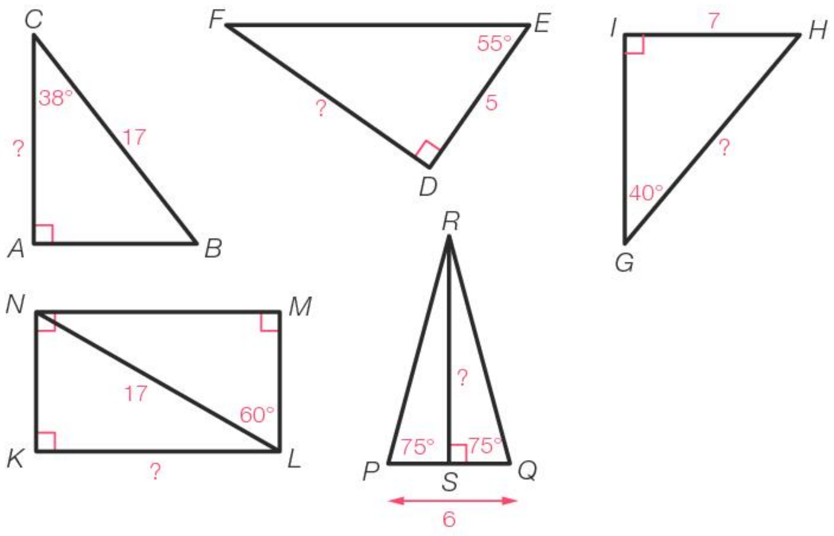
Dus $BC = 8\sin(32°) \approx 4{,}2$.

$\cos(\angle D) = \dfrac{DF}{DE}$

$\cos(64°) = \dfrac{5}{DE}$

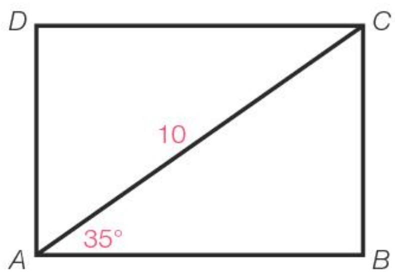
Dus $DE = \dfrac{5}{\cos(64°)} \approx 11{,}4$.

2 Bereken de lijnstukken met een vraagteken. Rond af op één decimaal.



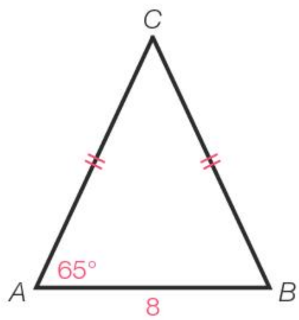
figuur 3.5

3 Gegeven is rechthoek *ABCD* met diagonaal *AC*. De lengte van *AC* is 10 en $\angle BAC = 35°$.
Bereken de omtrek van de rechthoek. Rond af op twee decimalen.



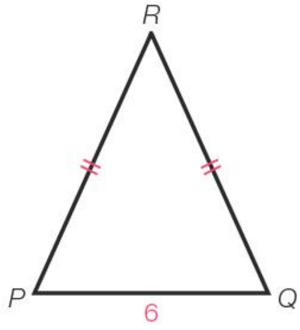
figuur 3.6

4 Gegeven is driehoek *ABC* met $AB = 8$, $AC = BC$ en $\angle A = 65°$.
Bereken de oppervlakte van de driehoek. Rond af op twee decimalen.



figuur 3.7

5 Gegeven is gelijkbenige driehoek *PQR* met $PR = QR$ en $PQ = 6$.
De oppervlakte van driehoek *PQR* is 20.
Bereken de hoeken van de driehoek. Rond af op één decimaal.



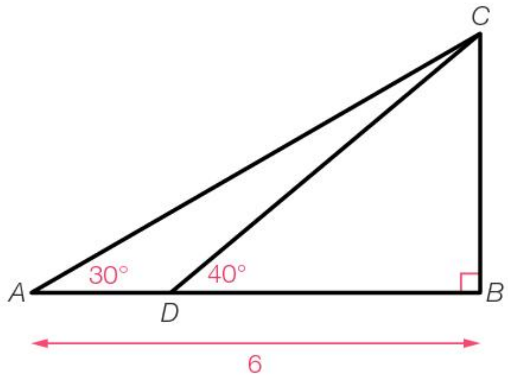
figuur 3.8

3.1 Berekeningen in driehoeken

01 In de rechthoekige driehoek ABC in figuur 3.9 is $AB = 6$ en $\angle BAC = 30°$.
Op AB ligt het punt D waarbij $\angle BDC = 40°$.
We vragen ons af wat de lengte van BD is.

a Licht toe dat $BC = 6\tan(30°)$ en bereken BC. Rond af op drie decimalen.

b Gebruik $\tan(\angle BDC)$ om BD te berekenen. Rond af op twee decimalen.

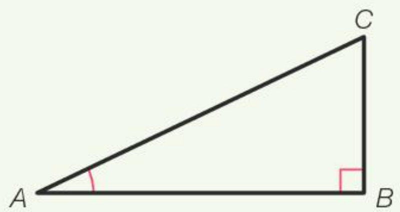


figuur 3.9

Theorie A Goniometrische berekeningen

Met de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens zijn hoeken en lijnstukken te berekenen.
Gebruik je bij berekeningen met de GR tussenresultaten, rond dan de tussenresultaten niet af maar gebruik Ans en geheugenplaatsen van de GR.

[▸GR] Neem uit de handleiding GR de module **Het gebruik van Ans en lettergeheugens** door.



$$\sin(\angle A) = \frac{BC}{AC}$$

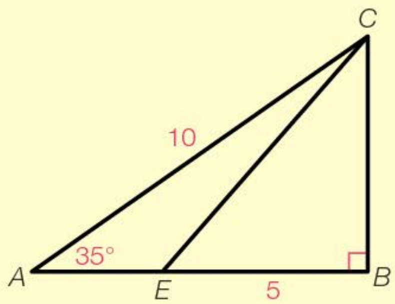
$$\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\angle A) = \frac{BC}{AB}$$

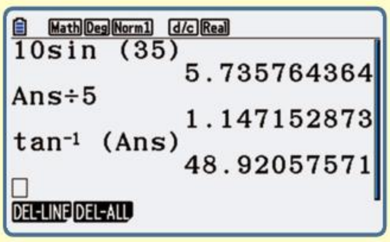
Afspraak
Rond bij het berekenen van een hoek af op één decimaal.

Om in de rechthoekige driehoek ABC hiernaast $\angle ACE$ te berekenen, ga je als volgt te werk.

- Bereken eerst BC in $\triangle ABC$.
  $\sin(35°) = \frac{BC}{10}$, dus $BC = 10\sin(35°)$.
- Bereken daarna $\angle BEC$ in $\triangle BCE$.
  $$\tan(\angle BEC) = \frac{BC}{BE} = \frac{10\sin(35°)}{5}$$
  $\angle BEC \approx 48{,}9°$
- Bereken eerst $\angle AEC$ en daarna $\angle ACE$ in $\triangle AEC$.
  $\angle AEC = 180° - \angle BEC \approx 180° - 48{,}9° = 131{,}1°$
  In $\triangle AEC$ is $\angle ACE \approx 180° - 35° - 131{,}1° = 13{,}9°$.

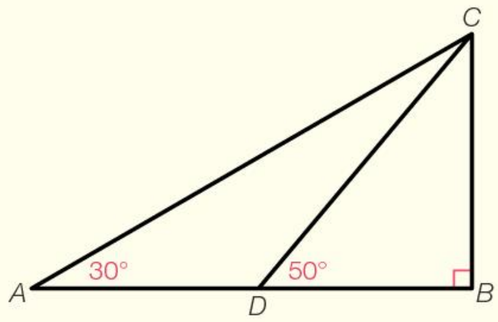


figuur 3.10



Voorbeeld

Gegeven is driehoek ABC met $\angle A = 30°$ en $\angle B = 90°$.
Het punt D ligt zo op AB dat $\angle BDC = 50°$.
Bereken welk gedeelte BD van AB is. Rond af op twee decimalen.



figuur 3.11

Uitwerking

Stel $AB = x$.

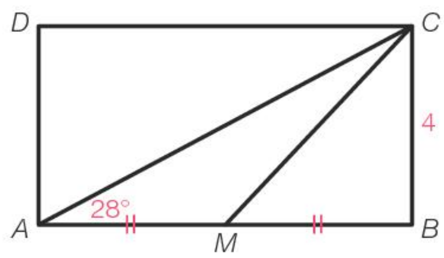
In $\triangle ABC$ is $\tan(30°) = \dfrac{BC}{x}$, dus $BC = x\tan(30°)$.

In $\triangle BDC$ is $\tan(50°) = \dfrac{BC}{BD}$, dus $BD = \dfrac{BC}{\tan(50°)}$.

Hieruit volgt dat $BD = \dfrac{x\tan(30°)}{\tan(50°)} = x \cdot 0{,}4844...$

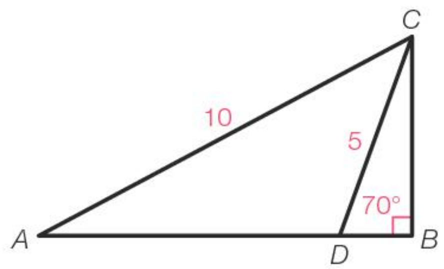
Dus $BD \approx 0{,}48AB$.

2 Gegeven is de rechthoek $ABCD$ in figuur 3.12.
$BC = 4$, $\angle BAC = 28°$ en M is het midden van AB.
Bereken $\angle BMC$.



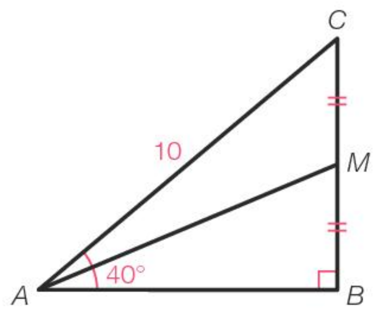
figuur 3.12

3 Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur 3.13.
$AC = 10$ en het punt D ligt zo op AB dat $CD = 5$ en $\angle BDC = 70°$.
Bereken $\angle ACD$.



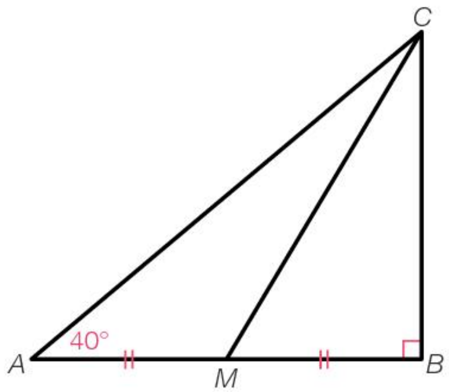
figuur 3.13

4 Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur 3.14.
$AC = 10$, $\angle BAC = 40°$ en M is het midden van BC.
Bereken $\angle BAM$.



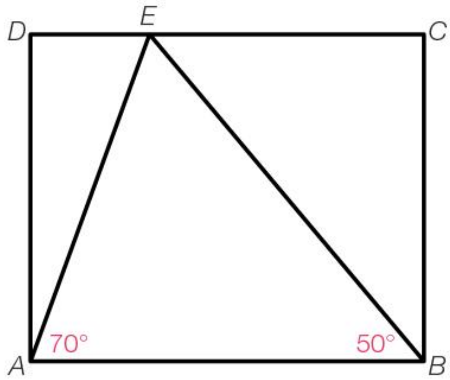
figuur 3.14

5 Gegeven is een driehoek ABC met $\angle A = 40°$ en $\angle B = 90°$. Het punt M is het midden van AB.
Bereken $\angle BMC$.



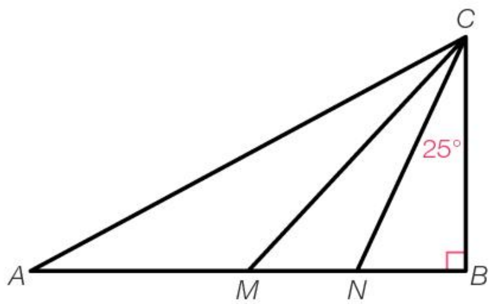
figuur 3.15

A6 Op de zijde CD van rechthoek $ABCD$ ligt het punt E zo, dat $\angle BAE = 70°$ en $\angle ABE = 50°$.
Er geldt $DE : CE = 1 : p$.
Bereken p. Rond af op twee decimalen.



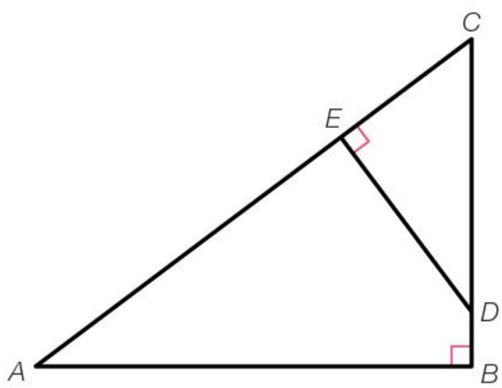
figuur 3.16

A7 Gegeven is driehoek ABC met $\angle B = 90°$.
Het punt M is het midden van AB en het punt N is het midden van BM. Verder is gegeven dat $\angle BCN = 25°$.
Zie de figuur hiernaast.
Bereken $\angle ACM$.



figuur 3.17

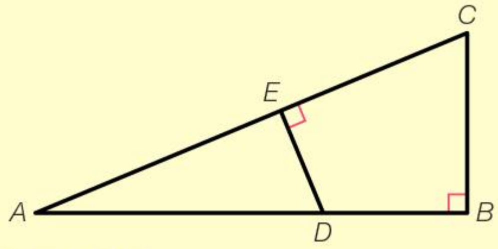
O8 In figuur 3.18 zijn twee gelijkvormige driehoeken te ontdekken.
Welke driehoeken zijn dat? Zet de letters in de juiste volgorde.



figuur 3.18

Theorie B Gelijkvormige driehoeken

In figuur 3.19 is driehoek ADE gelijkvormig met driehoek ACB. Notatie: $\triangle ADE \sim \triangle ACB$.
Deze gelijkvormigheid volgt uit gelijke hoeken.
$\angle A$ in $\triangle ADE$ is gelijk aan $\angle A$ in $\triangle ABC$ én
$\angle E$ in $\triangle ADE$ is gelijk aan $\angle B$ in $\triangle ABC$.



figuur 3.19

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee paar gelijke hoeken hebben.

Let op de volgorde van de letters in $\triangle ADE \sim \triangle ACB$

De overeenkomstige hoeken zijn met pijlen aangegeven.
Met de overeenkomstige zijden maak je een verhoudingstabel.

$\triangle ADE$	AD	AE	DE
$\triangle ACB$	AC	AB	BC

Om in de figuur hiernaast AC en CE te berekenen, ga je als volgt te werk.

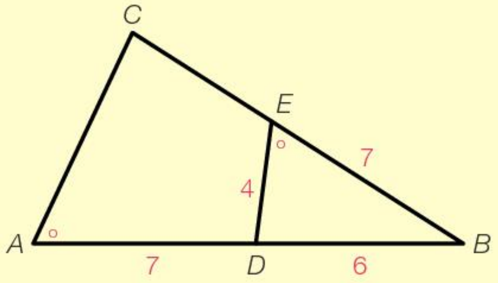
- Bereken eerst AC en BC met gelijkvormigheid.
  $\left.\begin{array}{l}\angle BAC = \angle BED \text{ (gegeven)} \\ \angle ABC = \angle DBE\end{array}\right\} \triangle ABC \sim \triangle EBD$

AB	AC	BC
BE	DE	BD

  geeft

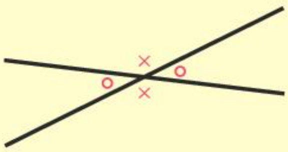
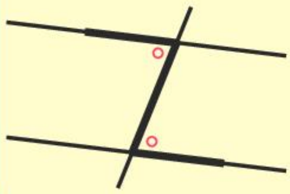
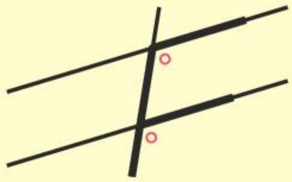
13	AC	BC
7	4	6

  $AC = \dfrac{13 \cdot 4}{7} = 7\frac{3}{7}$ en $BC = \dfrac{13 \cdot 6}{7} = 11\frac{1}{7}$
- Gebruik $CE = BC - BE$ om CE te berekenen.
  $CE = BC - BE = 11\frac{1}{7} - 7 = 4\frac{1}{7}$



figuur 3.20

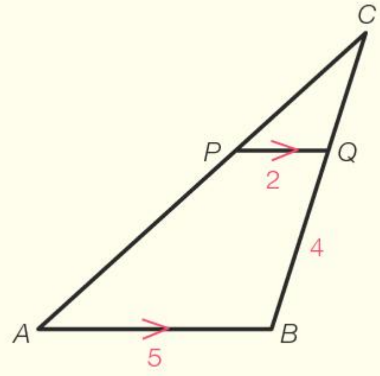
Om gelijkvormigheid van driehoeken aan te tonen, heb je gelijke hoeken nodig. Je kunt daarbij de volgende eigenschappen gebruiken.

Overstaande hoeken	Z-hoeken	F-hoeken
Bij snijdende lijnen zijn overstaande hoeken gelijk.	Bij evenwijdige lijnen horen gelijke Z-hoeken.	Bij evenwijdige lijnen horen gelijke F-hoeken.
		

In het voorbeeld op de volgende bladzijde worden F-hoeken gebruikt bij het aantonen van gelijkvormigheid.

Voorbeeld

Gegeven is driehoek ABC met $AB = 5$. Het punt P ligt op AC en het punt Q ligt op BC waarbij PQ evenwijdig is met AB. Verder is $BQ = 4$ en $PQ = 2$. Zie figuur 3.21.
Bereken CQ.



figuur 3.21

Aanpak
Bij het invullen van de verhoudingstabel zijn er twee onbekende zijden. Stel daarom de ene zijde gelijk aan x en druk de andere zijde uit in x.

Uitwerking

$$\left.\begin{array}{l}\angle BAC = \angle QPC \text{ (F-hoeken)} \\ \angle ACB = \angle PCQ\end{array}\right\} \triangle ABC \backsim \triangle PQC \text{ dus } \begin{array}{c|c} AB & BC \\ \hline PQ & CQ \end{array}$$

Om CQ te berekenen, heb je slechts een deel van de verhoudingstabel $\begin{array}{c|c|c} AB & AC & BC \\ \hline PQ & CP & CQ \end{array}$ nodig.

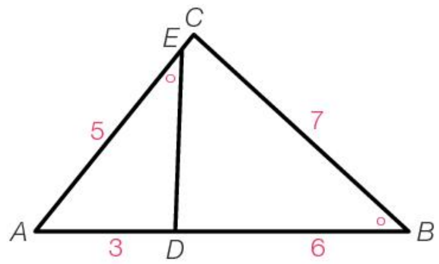
Stel $CQ = x$, dan is $BC = x + 4$.

Dit geeft $\begin{array}{c|c} 5 & x+4 \\ \hline 2 & x \end{array}$

$$5x = 2(x + 4)$$
$$5x = 2x + 8$$
$$3x = 8$$
$$x = 2\tfrac{2}{3}$$

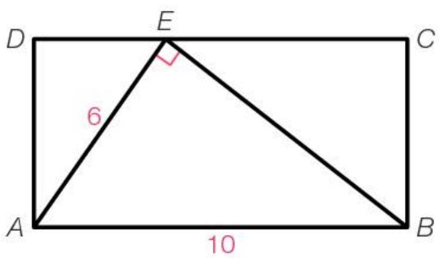
Dus $CQ = 2\frac{2}{3}$.

9 In figuur 3.22 is $AD = 3$, $BD = 6$, $AE = 5$ en $BC = 7$. Verder is $\angle AED = \angle B$. Zie figuur 3.22.
Bereken DE en CE.



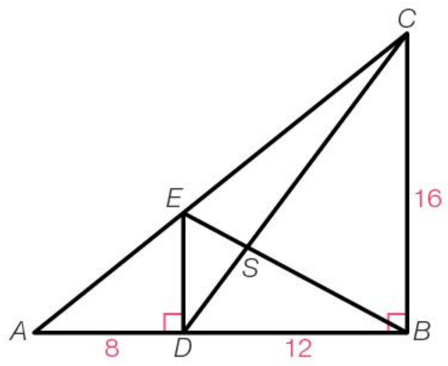
figuur 3.22

10 Gegeven is rechthoek $ABCD$ met $AB = 10$. Op zijde CD ligt punt E zo, dat $\angle AEB = 90°$ en $AE = 6$. Zie figuur 3.23.
Bereken AD en DE.



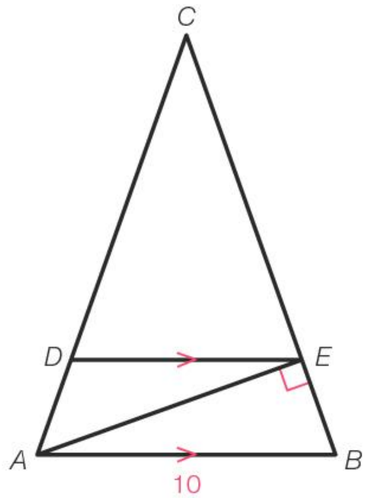
figuur 3.23

A11 □⊙✱ Van driehoek ABC is $AB = 20$, $BC = 16$ en $\angle B = 90°$. Het punt D ligt op AB waarbij $AD = 8$. Het punt E ligt op AC waarbij $\angle ADE = 90°$. Het snijpunt van BE en CD is S. Zie figuur 3.24.
Bereken DS.



figuur 3.24

A12 □⊙✱ Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC met $AB = 10$ en $AC = BC = 15$. De lijn AE staat loodrecht op BC en de lijn DE is evenwijdig met AB. Zie figuur 3.25.
Bereken DE.

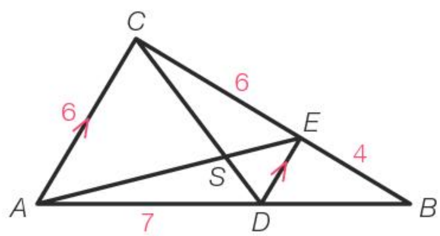


figuur 3.25

A13 ⊙✱ In driehoek ABC in figuur 3.26 is DE evenwijdig met AC en is S het snijpunt van AE en CD.
Verder is $AD = 7$, $BE = 4$, $CE = 6$ en $AC = 6$.

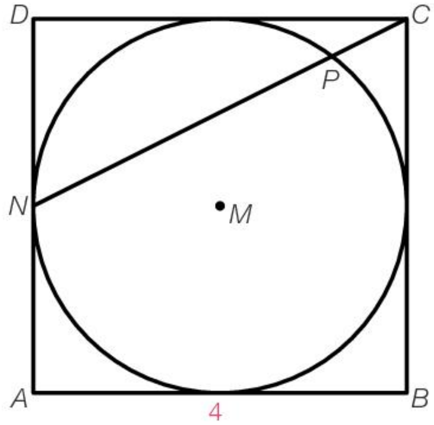
a Onderzoek met een berekening welke van de volgende beweringen waar is.
I $\angle ACB < 90°$
II $\angle ACB = 90°$
III $\angle ACB > 90°$

b Welke gedeelte is AS van AE?



figuur 3.26

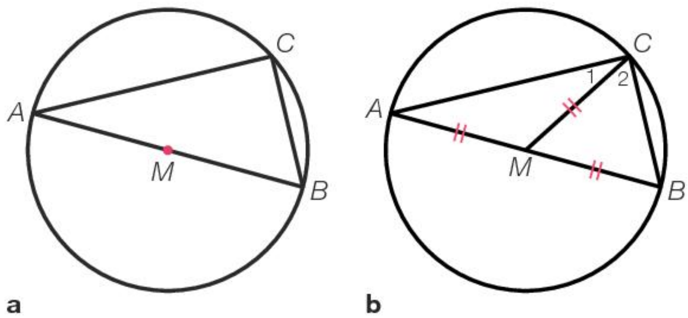
E14 ✱ Gegeven is het vierkant $ABCD$ met zijde 4. Het punt M is het middelpunt van de ingeschreven cirkel van het vierkant en het punt N is het midden van AD. De ingeschreven cirkel snijdt het lijnstuk CN in het punt P.
Zie de figuur hiernaast.
Bereken NP exact.



figuur 3.27

015

In figuur 3.28a is de cirkel met middelpunt M en middellijn AB getekend.
Het punt C ligt op de cirkel.
In deze opgave ga je bewijzen dat $\angle ACB = 90°$.



figuur 3.28

Zie figuur 3.28b.

a Licht toe dat $\angle A + \angle B + \angle C_{12} = 180°$.
b Licht toe dat $\angle A = \angle C_1$ en $\angle B = \angle C_2$.
c Licht toe hoe uit a en b volgt dat $\angle ACB = \angle C_{12} = 90°$.

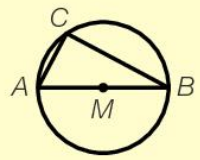
Theorie C Stellingen en definities

Bij wiskunde B krijg je vaak te maken met de opdracht 'Bewijs'.
Hiermee wordt het volgende bedoeld.

De uitwerking bij de opdracht 'Bewijs'
Het geven van een redenering en/of exacte berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt.
Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
Het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden voldoet niet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.

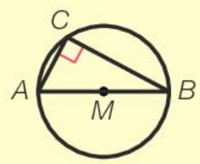
In opgave 15 heb je de **stelling van Thales** bewezen.

Stelling van Thales
Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is hoek ACB recht.



In opgave 16 ga je de **omgekeerde stelling van Thales** bewijzen.

Omgekeerde stelling van Thales
Als hoek C in driehoek ABC recht is, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB.



In opgave 17 bewijs je de stelling van de **raaklijn aan een cirkel**.
Daarom geven we eerst de **definitie** van een raaklijn aan een cirkel.

Definitie van raaklijn aan cirkel
Een raaklijn aan een cirkel is een lijn die één punt met de cirkel gemeen heeft.

INFORMATIEF

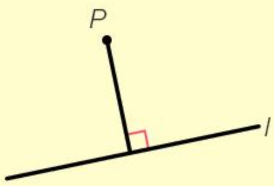
Definitie en stelling

Een stelling is een eigenschap of bewering die bewezen kan worden. Bij een bewijs mag je uitgaan van wat bekend is, dat wil zeggen dat je definities en eerder bewezen stellingen mag gebruiken. Zo heb je bij het bewijs van de stelling van Thales in opgave 15 gebruikt dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is (stelling hoekensom driehoek) en dat in een gelijkbenige driehoek de hoeken tegenover de even lange zijden even groot zijn (stelling gelijkbenige driehoek). Om deze stelling over de gelijkbenige driehoek te bewijzen, ga je uit van de volgende definitie: Een gelijkbenige driehoek is een driehoek met (minstens) twee even lange zijden (definitie gelijkbenige driehoek).

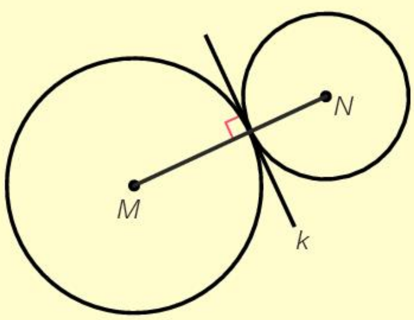
Stelling raaklijn aan cirkel
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van het middelpunt van de cirkel en het raakpunt.

Met behulp van de bovenstaande stelling zijn andere stellingen over raaklijnen aan cirkels te bewijzen. Zie de opgaven 18 en 19.
Daarbij gebruik je ook het begrip **afstand van een punt tot een lijn**.

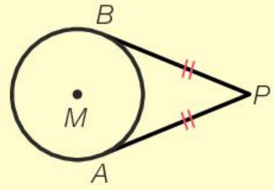
Definitie van afstand punt tot lijn
De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van het loodlijnstuk neergelaten vanuit dat punt op die lijn.



Stelling raaklijn in gemeenschappelijk raakpunt
De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.



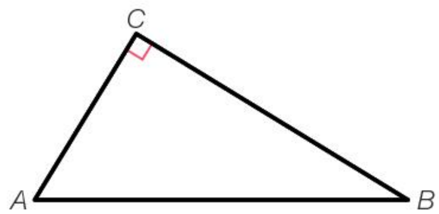
Stelling afstand punt tot raakpunten
Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel getrokken worden, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.



Nadat deze stellingen zijn bewezen, mag je ze in de opgaven zonder toelichting gebruiken.

16

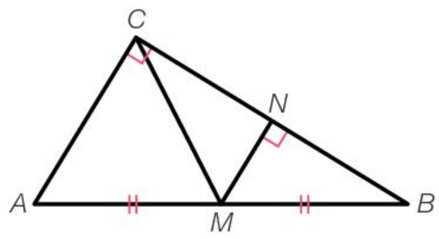
In deze opgave ga je de omgekeerde stelling van Thales bewijzen. Zie figuur 3.29.
Omgekeerde stelling van Thales:
Als hoek *C* in driehoek *ABC* recht is, dan ligt *C* op de cirkel met middellijn *AB*.



figuur 3.29

In figuur 3.30 is het midden M van AB getekend.
Verder is $MN \perp BC$.

a Toon aan dat $\triangle ABC \sim \triangle MBN$.
b Toon aan dat $BN = CN$.
c Toon met behulp van de stelling van Pythagoras aan dat $BM = CM$.
d Maak het bewijs af.

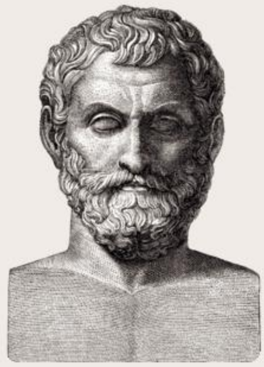


figuur 3.30

GESCHIEDENIS

Thales van Milete

Thales van Milete (ca. 624-547 v.Chr.) leefde in Milete, een plaats in het huidige Turkije.
Men veronderstelt dat Thales de grondlegger is van een logische opbouw in de meetkunde en dat hij, naast de naar hem vernoemde stelling, de volgende stellingen ontdekte.

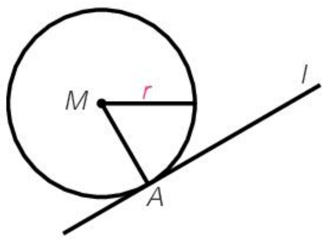


- Een cirkel wordt in twee gelijke delen verdeeld door elke middellijn.
- Een gelijkbenige driehoek heeft gelijke basishoeken.
- Bij snijdende lijnen zijn overstaande hoeken gelijk.
- Twee driehoeken zijn gelijk als ze twee hoeken en een zijde gelijk hebben.

Verder is hij waarschijnlijk de eerste die gebruikmaakte van gelijkvormige driehoeken.

17

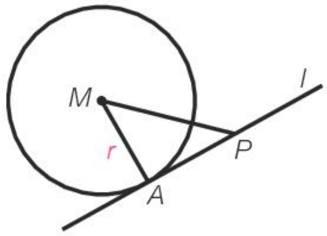
In deze opgave ga je de stelling van een raaklijn aan een cirkel bewijzen. Zie figuur 3.31.
Stelling raaklijn aan een cirkel:
Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van het middelpunt van de cirkel en het raakpunt.



figuur 3.31

In figuur 3.32 is een punt P op de raaklijn l getekend dat niet samenvalt met A.
Uit de definitie van de raaklijn aan een cirkel volgt dat $MP > MA$.

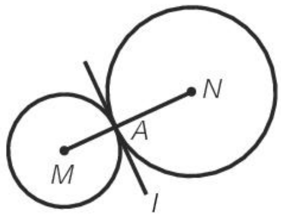
a Licht dit toe.
b Hoe volgt nu uit de definitie van de afstand van een punt tot een lijn dat $MA \perp l$?



figuur 3.32

18

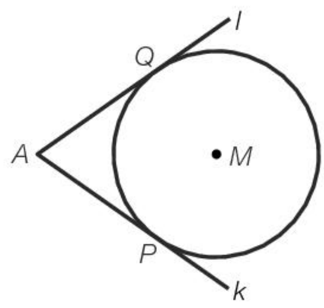
In figuur 3.33 is het punt A het gemeenschappelijke raakpunt van de cirkels met middelpunten M en N. De gemeenschappelijke raaklijn is l.
Bewijs dat $MN \perp l$.



figuur 3.33

19

Vanuit het punt A zijn de raaklijnen k en l aan de cirkel met middelpunt M getekend. De raakpunten zijn P en Q. Zie figuur 3.34.
Gebruik de stelling van Pythagoras om te bewijzen dat $AP = AQ$.

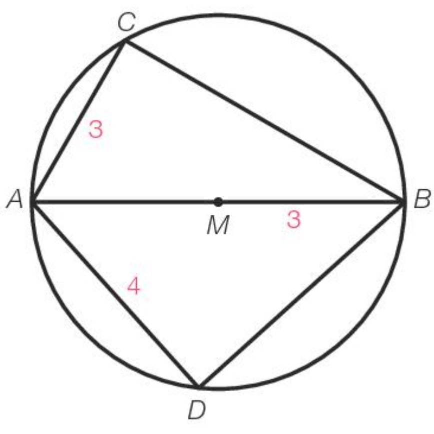


figuur 3.34

20

Op de cirkel met middelpunt M, straal 3 en middellijn AB liggen de punten C en D zo, dat $AC = 3$ en $AD = 4$. Zie figuur 3.35.

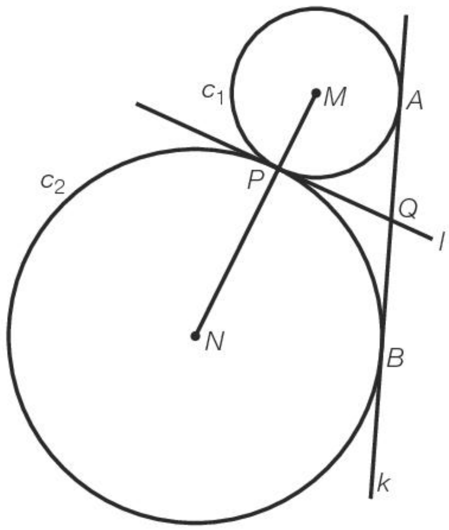
a Bereken BC en BD.
b Onderzoek met een berekening of het punt B op de cirkel ligt waarvan CD middellijn is.



figuur 3.35

A21

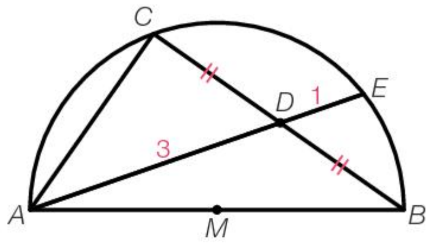
Gegeven is de cirkel c_1 met middelpunt M en straal 3 en de cirkel c_2 met middelpunt N en straal 5.
De lijn k raakt c_1 in A en c_2 in B. Het gemeenschappelijke raakpunt van c_1 en c_2 is P en de gemeenschappelijke raaklijn in P is l.
De lijnen k en l snijden elkaar in het punt Q.
Zie figuur 3.36.
Bereken PQ.



figuur 3.36

E22 *

Op de cirkel met middellijn AB ligt het punt C.
Het punt D is het midden van lijnstuk BC. De lijn AD snijdt de cirkel ook in E.
Verder is gegeven dat $AD = 3$ en $DE = 1$.
Bereken exact de tangens van $\angle BAC$.

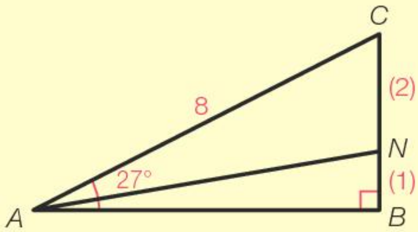


figuur 3.37

Terugblik

Goniometrische berekeningen

Met de goniometrische verhoudingen zijn hoeken en zijden in rechthoekige driehoeken te berekenen. Gebruik je bij goniometrische berekeningen tussenresultaten, rond dan niet tussentijds af, maar gebruik geheugenplaatsen en/of Ans.



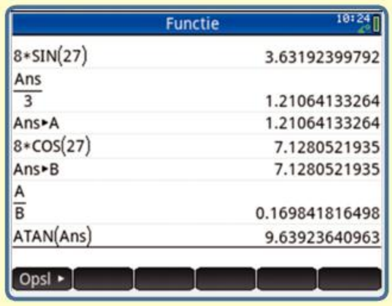
In de figuur hiernaast is $BN = \frac{1}{3}BC$.
Bij het berekenen van $\angle BAN$ ga je als volgt te werk.

In $\triangle ABC$ is $\sin(27°) = \dfrac{BC}{8}$,

dus $BC = 8\sin(27°) = 3{,}63...$, dus $BN = \frac{1}{3} \cdot 3{,}63... = 1{,}21...$

In $\triangle ABC$ is $\cos(27°) = \dfrac{AB}{8}$, dus $AB = 8\cos(27°) = 7{,}12...$

In $\triangle ABN$ is $\tan(\angle BAN) = \dfrac{BN}{AB} = \dfrac{1{,}21...}{7{,}12...}$, dus $\angle BAN \approx 9{,}6°$.



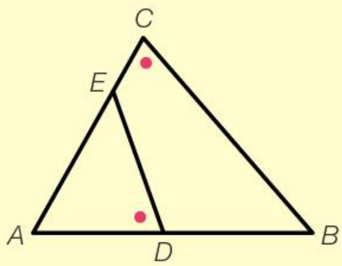
Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze twee paar hoeken gelijk hebben. In de figuur hiernaast is

$$\left.\begin{aligned} &\angle BAC = \angle DAE \\ &\angle ACB = \angle ADE \text{ (gegeven)}\end{aligned}\right\} \triangle ABC \sim \triangle AED$$

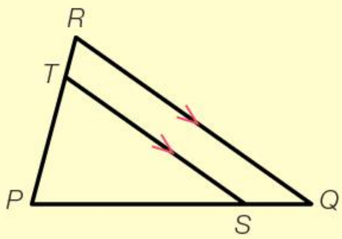
Uit deze gelijkvormigheid volgt de verhoudingstabel

AB	AC	BC
AE	AD	DE



Denk bij evenwijdige lijnen aan gelijke F-hoeken of gelijke Z-hoeken.
In de figuur hiernaast is

$$\left.\begin{aligned} &\angle QPR = \angle SPT \\ &\angle PRQ = \angle PTS \text{ (F-hoeken)}\end{aligned}\right\} \triangle PQR \sim \triangle PST$$



Stellingen en cirkels

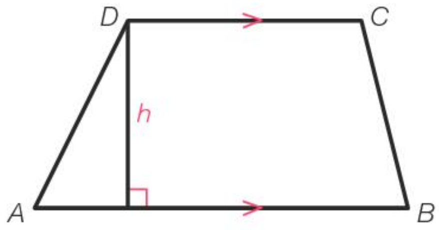
Je hebt de volgende stellingen bewezen.

1 Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is hoek ACB recht.
2 Als C in driehoek ABC recht is, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB.
3 Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van het middelpunt van de cirkel en het raakpunt.
4 De raaklijn in het gemeenschappelijke raakpunt van twee elkaar rakende cirkels staat loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten.
5 Als vanuit een punt twee raaklijnen aan een cirkel worden getrokken, dan zijn de afstanden van dat punt tot de twee raakpunten gelijk.

Deze stellingen mag je zonder toelichting gebruiken.

3.2 Lengte, omtrek en oppervlakte

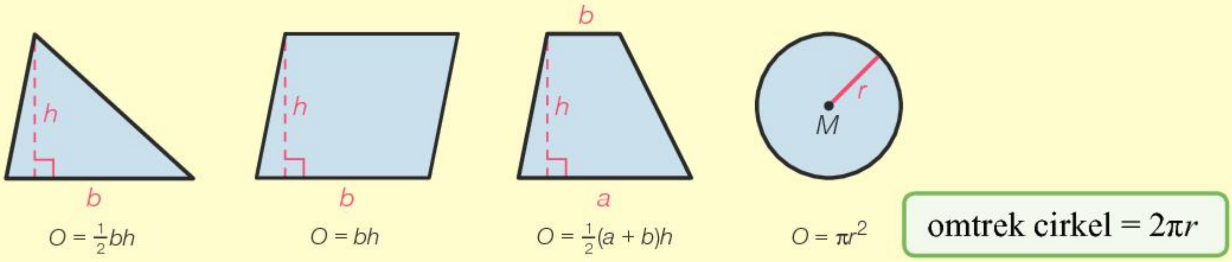
O23 In de figuur hiernaast zie je het trapezium $ABCD$ met hoogte h.
Bewijs dat $O(ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h$.



figuur 3.38

Theorie A Oppervlakte van vlakke figuren

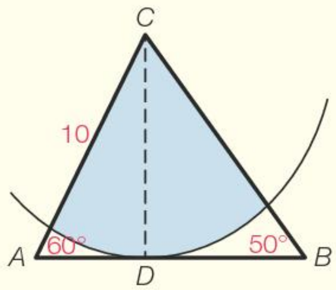
Bij het berekenen van de oppervlakte van een vlakke figuur, splits je de figuur soms op in basisfiguren. Ook komt het voor dat je de figuur kunt aanvullen tot een basisfiguur.
We herhalen de oppervlakteformules van de basisfiguren driehoek, parallellogram, trapezium en cirkel.



figuur 3.39 Oppervlakteformules van de vier basisfiguren.

Voorbeeld

Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle A = 60°$, $\angle B = 50°$ en $AC = 10$.
De cirkel met middelpunt C raakt zijde AB in D.
Bereken de oppervlakte van het gebied dat binnen de cirkel en binnen de driehoek ligt. Rond af op twee decimalen.

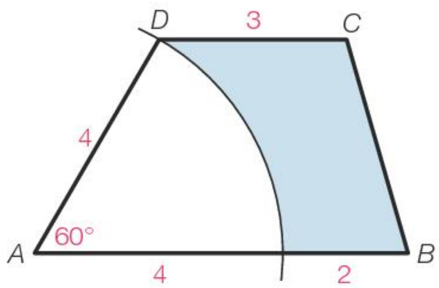


figuur 3.40

Uitwerking
De straal van de cirkel is CD.
In $\triangle ACD$ is $\sin(60°) = \frac{CD}{10}$, dus $CD = 10\sin(60°) = 8{,}66...$
$\angle C = 180° - \angle A - \angle B = 180° - 60° - 50° = 70°$
De oppervlakte van het gevraagde gebied is $\frac{70}{360} \cdot \pi \cdot 8{,}66...^2 \approx 45{,}81$.

24

Van het trapezium $ABCD$ in figuur 3.41 is $AB = 6$, $AD = 4$, $CD = 3$ en $\angle A = 60°$. Punt A is het middelpunt van de cirkel met straal 4.
Bereken de oppervlakte van het gebied dat binnen het trapezium maar buiten de cirkel ligt. Rond af op twee decimalen.



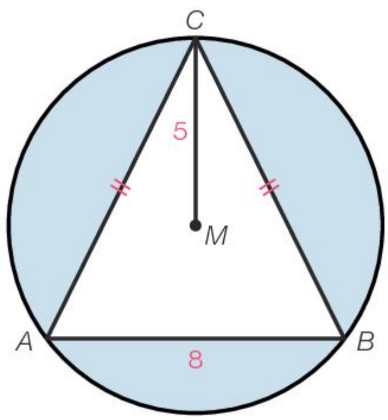
figuur 3.41

25

Gegeven is de gelijkbenige driehoek ABC met $AC = BC$ en $AB = 8$. De omgeschreven cirkel van de driehoek heeft straal 5. Zie figuur 3.42.

a Bereken exact de oppervlakte van het gebied dat binnen de cirkel maar buiten de driehoek ligt.

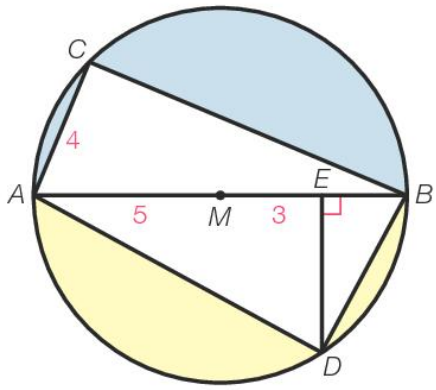
b Bereken de oppervlakte en de omtrek van het gekleurde gebied dat ingesloten wordt door zijde AB en boog AB. Rond af op twee decimalen.



figuur 3.42

A26

Gegeven is de cirkel met middelpunt M en straal 5.
AB is een middellijn en de punten C en D liggen op de cirkel.
$AC = 4$ en DE staat loodrecht op AB met $ME = 3$. Zie figuur 3.43.
De oppervlakte van het blauwe gebied is groter dan de oppervlakte van het gele gebied.
Bereken exact het verschil tussen deze oppervlakten.



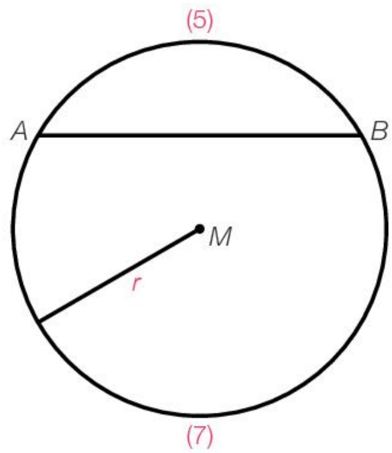
figuur 3.43

A27

$ABCD$ is een trapezium met AB en CD als evenwijdige zijden. De lengte van AB is a, de lengte van CD is b en $a > b$.
P is het midden van de diagonaal AC en Q is het midden van de diagonaal BD.
Druk de lengte van PQ uit in a en b.

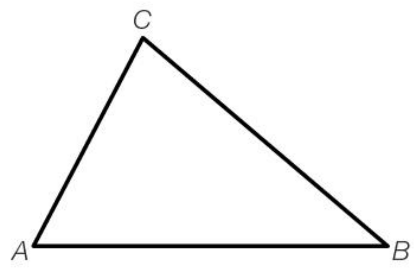
E28

Op de cirkel met straal r liggen de punten A en B die de cirkelomtrek verdelen in twee bogen waarvan de lengten zich verhouden als 5 : 7. Het lijnstuk AB verdeelt de cirkel in twee gebieden. Zie de figuur hiernaast.
Druk de oppervlakte van het kleinste gebied uit in r.



figuur 3.44

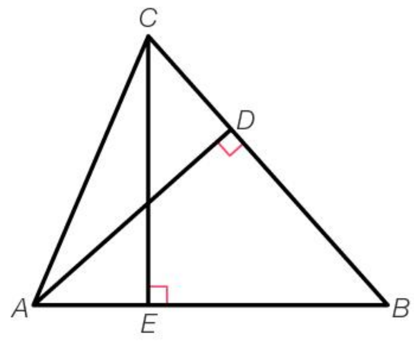
029 Gegeven is driehoek ABC in de figuur hiernaast.
Druk de oppervlakte van de driehoek uit in AB, AC en $\sin(\angle A)$.



figuur 3.45

030 Zie figuur 3.46 met driehoek ABC en de hoogtelijnen AD en CE.

a Druk de oppervlakte van driehoek ABC uit in AB en CE.
b Druk de oppervlakte van driehoek ABC uit in BC en AD.
c Licht toe dat uit a en b volgt dat $AB \cdot CE = BC \cdot AD$.

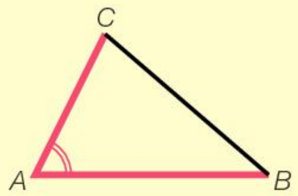


figuur 3.46

Theorie B Lengte en oppervlakte

In opgave 29 heb je bewezen dat de oppervlakte van een driehoek gelijk is aan de helft van de ene zijde keer de andere zijde keer de sinus van de ingesloten hoek.

$$O(\triangle ABC) = \tfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$$

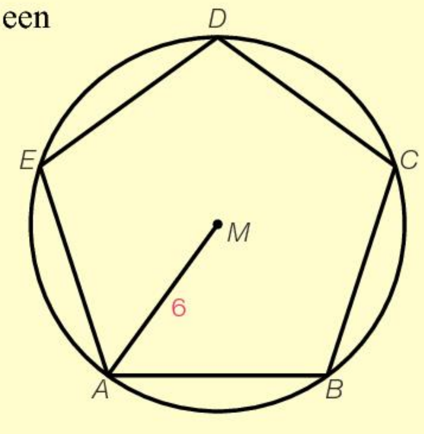


Met deze formule is bijvoorbeeld snel de oppervlakte van een regelmatige vijfhoek te berekenen waarvan de straal van de omgeschreven cirkel gelijk is aan 6. Zie de figuur hiernaast.

Bereken eerst $\angle AMB$. Je krijgt $\angle AMB = \dfrac{360°}{5} = 72°$.

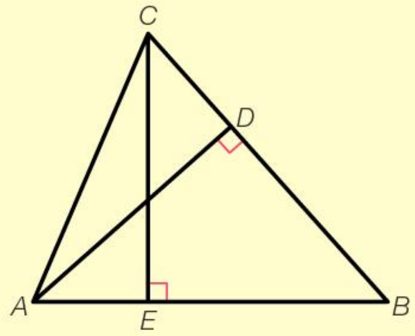
Dus $O(\triangle ABM) = \tfrac{1}{2} \cdot AM \cdot BM \cdot \sin(\angle AMB)$
$= \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin(72°) = 18\sin(72°)$

en $O(ABCDE) = 5 \cdot 18\sin(72°) = 90\sin(72°) \approx 85{,}6$.



figuur 3.47

In opgave 30 heb je gezien dat in de figuur hiernaast geldt dat $AB \times CE = BC \times AD$.
We zeggen kortweg zijde × hoogte = zijde × hoogte en spreken daarom van de **zijde × hoogte-methode**.

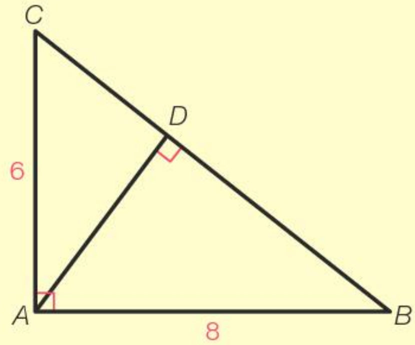


figuur 3.48

De zijde × hoogte-methode

Voor driehoeken geldt:
ene zijde × bijbehorende hoogte =
andere zijde × bijbehorende hoogte.

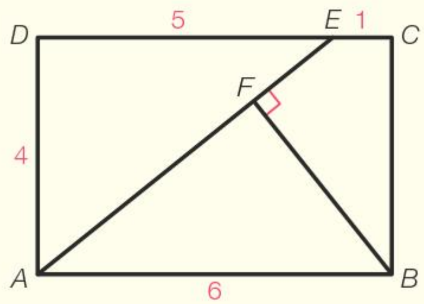
Je gebruikt de zijde × hoogte-methode om in figuur 3.49 de lengte van AD te berekenen. Bereken eerst BC met de stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$.



figuur 3.49

Je krijgt $BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.
De zijde × hoogte-methode in $\triangle ABC$ geeft
$BC \cdot AD = AB \cdot AC$
$10 \cdot AD = 8 \cdot 6$
$AD = \dfrac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8$

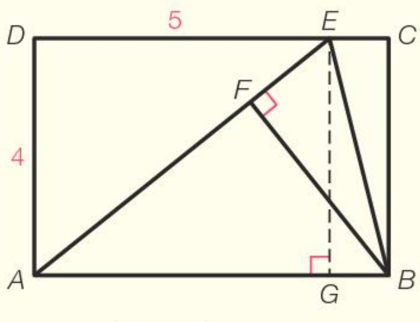
Voorbeeld
Zie figuur 3.50 met de rechthoek $ABCD$.
Bereken BF exact.



figuur 3.50

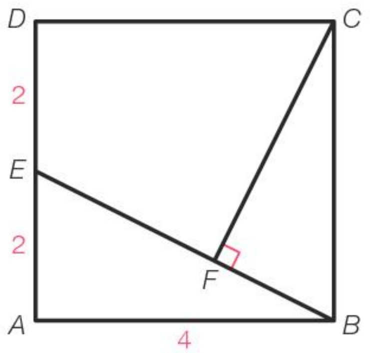
Aanpak
BF is in $\triangle ABE$ de hoogte bij zijde AE.
Teken dus $\triangle ABE$ en gebruik hierin de zijde × hoogte-methode.

Uitwerking



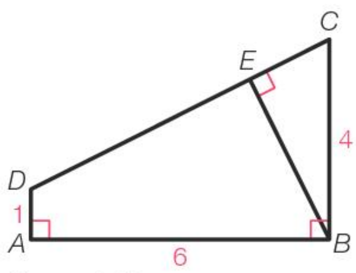
$AE = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$
De zijde × hoogte-methode in $\triangle ABE$ geeft
$AE \cdot BF = AB \cdot EG$
$\sqrt{41} \cdot BF = 6 \cdot 4$
$BF = \dfrac{6 \cdot 4}{\sqrt{41}} = \dfrac{24}{\sqrt{41}}$

31 Zie figuur 3.51 met het vierkant $ABCD$.
Bereken CF exact.



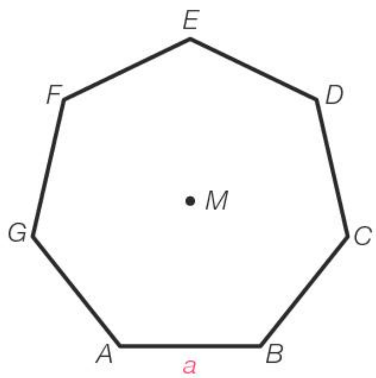
figuur 3.51

32 Gegeven is het rechthoekig trapezium $ABCD$ in figuur 3.52.
$AB = 6$, $AD = 1$ en $BC = 4$.
Bereken BE exact.



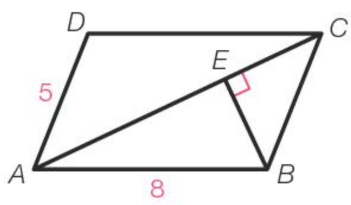
figuur 3.52

33 Gegeven is de regelmatige zevenhoek $ABCDEFG$ met zijde a.
Druk de oppervlakte van de zevenhoek uit in a. Rond in het antwoord af op drie decimalen.



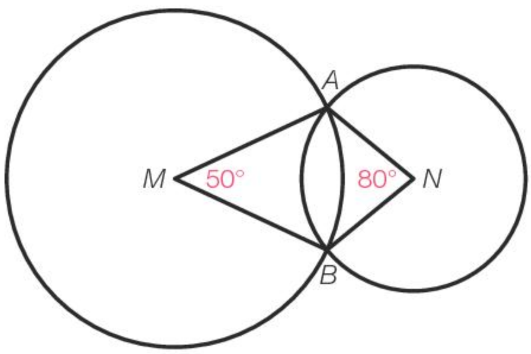
figuur 3.53

A34 Gegeven is het parallellogram $ABCD$ in figuur 3.54.
$AB = 8$, $AD = 5$ en de oppervlakte van het parallellogram is 32.
Bereken BE exact.



figuur 3.54

A35 De cirkels met middelpunten M en N snijden elkaar in de punten A en B. Zie figuur 3.55 met $\angle AMB = 50°$ en $\angle ANB = 80°$.
De straal van de cirkel met middelpunt N is r.
Druk de oppervlakte van vierhoek $AMBN$ uit in r. Rond in het antwoord af op drie decimalen.



figuur 3.55

Terugblik

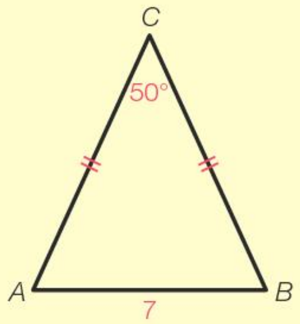
Oppervlakteformules

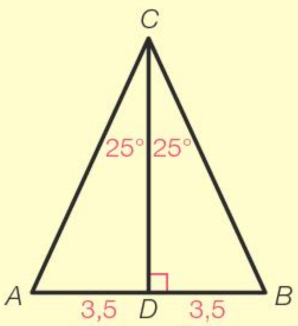
Bij oppervlakteberekeningen gebruik je de oppervlakteformules van de basisfiguren driehoek, parallellogram, trapezium en cirkel.
Vaak kun je bij het berekenen van de oppervlakte een figuur opsplitsen in basisfiguren of aanvullen tot een basisfiguur.

$$O_{\text{driehoek}} = \tfrac{1}{2}bh$$
$$O_{\text{parallellogram}} = bh$$
$$O_{\text{trapezium}} = \tfrac{1}{2}(a+b)h$$
$$O_{\text{cirkel}} = \pi r^2$$

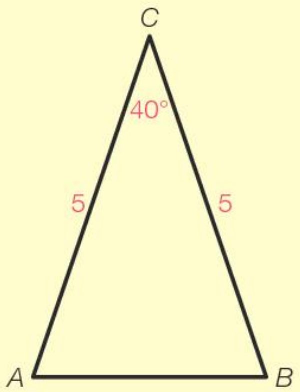
Goniometrische verhoudingen

Om de oppervlakte van $\triangle ABC$ in de figuur hiernaast te berekenen, heb je goniometrie nodig. Gebruik ook de formule $O = \tfrac{1}{2}bh$.
Teken de hoogtelijn CD.





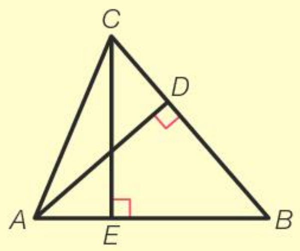
$$\tan(25°) = \frac{3{,}5}{CD}$$
$$CD = \frac{3{,}5}{\tan(25°)} = 7{,}50...$$
$$O(\triangle ABC) = \tfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7{,}50... \approx 26{,}3$$

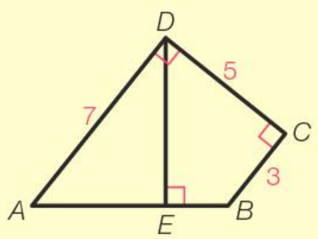


Van $\triangle ABC$ in de figuur hiernaast zijn twee zijden en de ingesloten hoek gegeven. Je kunt de oppervlakte berekenen met de formule $O(\triangle ABC) = \tfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin(\angle C)$.
Je krijgt $O(\triangle ABC) = \tfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \sin(40°) \approx 8{,}03$.

De zijde × hoogte-methode

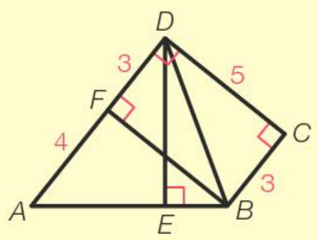
Met de zijde × hoogte-methode zijn lengten van lijnstukken te berekenen bij loodrechte stand.
In driehoek ABC hiernaast geeft de zijde × hoogte-methode $AB \times CE = BC \times AD$.
Kortweg: zijde × hoogte = zijde × hoogte.





Bij het berekenen van DE in de figuur hiernaast gebruik je de zijde × hoogte-methode.
Teken eerst BF loodrecht op AD en bereken AB in driehoek ABF.
$AF = 7 - 3 = 4$ en $BF = CD = 5$, dus $AB = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$.
De zijde × hoogte-methode in driehoek ABD geeft
$AB \cdot DE = AD \cdot BF$.

Invullen geeft $\sqrt{41} \cdot DE = 7 \cdot 5$, dus $DE = \dfrac{35}{\sqrt{41}}$.



3.3 Rekenen met wortels

036 Welke van de volgende beweringen zijn waar? Gebruik zo nodig je GR.

I $\sqrt{25\frac{1}{4}} = 5\frac{1}{2}$

II $\sqrt{60\frac{1}{2}} = 5\frac{1}{2}\sqrt{2}$

III $\dfrac{4}{\sqrt{12}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

IV $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = 3$

V $(2\sqrt{3} - \sqrt{6})^2 = 18 - 12\sqrt{12}$

VI $\dfrac{4}{\sqrt{2} - 1} = 4 + 4\sqrt{2}$

Theorie A Rekenregels voor wortels

Voor het vermenigvuldigen en delen van wortels gelden de volgende regels.

$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$ **mits** $A \geq 0 \wedge B \geq 0$

$\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$ **mits** $A \geq 0 \wedge B > 0$

$\wedge$ betekent en.

Dus $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$ en $\dfrac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}} = \sqrt{11}$.

$\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ is te herleiden tot een vorm zonder wortelteken in de noemer.

Je vermenigvuldigt daartoe teller en noemer met $\sqrt{5}$.

$$\frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} = \tfrac{4}{5}\sqrt{5}$$

Bij $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ kun je de breuk onder het wortelteken wegwerken.

$$\sqrt{12\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{25}{2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$, dus ook

$\sqrt{\dfrac{A}{B}} = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

Let erop dat $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ niet te herleiden is.

Omdat $\sqrt{8} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ is $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ wel te herleiden.

Je krijgt $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

Bij de herleiding van $\sqrt{8}$ tot $2\sqrt{2}$ is een factor voor het wortelteken gebracht. Dit lukt omdat 8 het product is van een kwadraat en een geheel getal.

Door een factor voor het wortelteken te brengen en door een wortel uit de noemer van een breuk weg te werken, kun je soms termen die ogenschijnlijk niet gelijksoortig zijn toch samennemen.
Zo is
$\sqrt{8} + \sqrt{32} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$.

Bij het herleiden van $(\sqrt{10} + \sqrt{3})^2$ gebruik je een merkwaardig product. Je krijgt

$(\sqrt{10} + \sqrt{3})^2 = 10 + 2\sqrt{30} + 3 = 13 + 2\sqrt{30}$.

Het dubbelproduct van $\sqrt{10}$ en $\sqrt{3}$ is $2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{30}$.

merkwaardige producten
$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

Het merkwaardige product $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ gebruik je om bij een vorm als $\dfrac{28}{4 + \sqrt{2}}$ de wortel uit de noemer weg te werken.

$$\frac{28}{4 + \sqrt{2}} = \frac{28}{4 + \sqrt{2}} \cdot \frac{4 - \sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}} = \frac{28(4 - \sqrt{2})}{16 - 2} = 2(4 - \sqrt{2}) = 8 - 2\sqrt{2}$$

Voorbeeld

a Herleid $\sqrt{20a} - \sqrt{\frac{5}{9}a}$.

b Herleid $(3a\sqrt{2} + 1)(3a\sqrt{2} - 1)$.

c Herleid $\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ tot de vorm $a + b\sqrt{c}$.

Uitwerking

a $\sqrt{20a} - \sqrt{\frac{5}{9}a} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5a} - \sqrt{\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{5a} = 2\sqrt{5a} - \frac{1}{3}\sqrt{5a} = 1\frac{2}{3}\sqrt{5a}$

b $(3a\sqrt{2} + 1)(3a\sqrt{2} - 1) = (3a\sqrt{2})^2 - 1^2 = 18a^2 - 1$

$(3a\sqrt{2})^2 = (3a)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 9a^2 \cdot 2 = 18a^2$

c $\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \dfrac{12\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} = 4\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{10} + 8$

37 Herleid.

a $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{5}$

b $\dfrac{5\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$

c $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

d $\sqrt{\tfrac{1}{2}}$

e $\sqrt{24}+\sqrt{6}$

f $\sqrt{80}-\dfrac{10}{\sqrt{5}}$

38 Herleid.

a $\sqrt{4\tfrac{1}{2}}$

b $a\sqrt{8}-a\sqrt{2}$

c $(3\sqrt{2}-\sqrt{5})^2$

d $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2$

e $(a-a\sqrt{2})^2$

f $(\tfrac{1}{2}\sqrt{5})^2$

39 Herleid.

a $3a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{7}$

b $\dfrac{2\sqrt{14}}{3\sqrt{7}}$

c $\sqrt{12\tfrac{1}{2}}+\sqrt{24\tfrac{1}{2}}$

d $(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{3}{4}\sqrt{3})^2$

e $\sqrt{18a}-\sqrt{8a}$

f $\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}\cdot\tfrac{1}{2}a\sqrt{3}$

40 Herleid.

a $\sqrt{2a}+\sqrt{\tfrac{1}{2}a}$

b $(\tfrac{2}{3}a\sqrt{3})^2+a^2\sqrt{7\tfrac{1}{9}}$

c $(5\sqrt{3}+2)(5\sqrt{3}-2)$

d $(a-\sqrt{3})^2$

e $(2-\sqrt{2})^2$

f $(1\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3})^2$

A41 Herleid.

a $\sqrt{12a}+\sqrt{\tfrac{3}{4}a}$

b $\sqrt{5\tfrac{1}{3}}-\sqrt{1\tfrac{1}{3}}$

c $\dfrac{9}{4\sqrt{2}}-\sqrt{2}$

d $(\tfrac{1}{4}a\sqrt{2})^2+(\tfrac{3}{4}a\sqrt{2})^2$

e $(2a\sqrt{2}-a\sqrt{3})^2$

f $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$

A42 Herleid tot de vorm $a+b\sqrt{c}$.

a $\dfrac{14}{3-\sqrt{2}}$

b $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}$

c $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

d $\dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$

e $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

f $\dfrac{6-5\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

E43

a Bereken alle geordende paren (x, y) van positieve gehele getallen x en y met $x<y$ die oplossing zijn van $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{50}$.

b Bereken exact $((\sqrt{2}+1)^7+(\sqrt{2}-1)^7)^2-((\sqrt{2}+1)^7-(\sqrt{2}-1)^7)^2$.

O44 Los exact op.

a $2x=16-8\sqrt{3}$

b $5x-10\sqrt{2}=50$

Theorie B Vergelijkingen met wortels

In opgave 44 komen lineaire vergelijkingen met wortels voor.
Ook de vergelijking $x\sqrt{2} - 3 = \sqrt{6}$ is een lineaire vergelijking.
Bij het oplossen van deze vergelijking laat je de term met x in het linkerlid staan en zorg je ervoor dat de overige termen in het rechterlid komen. Zie voorbeeld a.
Bij de vergelijking $x\sqrt{2} + 2x = 8$ breng je eerst x buiten haakjes. Zie voorbeeld b.

Voorbeeld

Los exact op.

a $x\sqrt{2} - 3 = \sqrt{6}$

b $x\sqrt{2} + 2x = 8$

Uitwerking

a $x\sqrt{2} - 3 = \sqrt{6}$

$x\sqrt{2} = 3 + \sqrt{6}$ — Deel beide leden door $\sqrt{2}$.

$x = \dfrac{3}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ — Herleid de breuken.

$x = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}$

$x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}$

$x = 1\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}$

b $x\sqrt{2} + 2x = 8$ — Breng x buiten haakjes.

$x(\sqrt{2} + 2) = 8$ — Deel beide leden door $\sqrt{2} + 2$.

$$x = \frac{8}{\sqrt{2}+2} = \frac{8}{\sqrt{2}+2} \cdot \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-2} = \frac{8(\sqrt{2}-2)}{2-4} = -4(\sqrt{2}-2) = 8 - 4\sqrt{2}$$

45 Los exact op.

a $x\sqrt{5} + 2 = \sqrt{10}$

b $7 - x\sqrt{3} = \sqrt{2}$

c $\frac{1}{2}x\sqrt{2} + \sqrt{10} = 0$

d $x\sqrt{8} + x\sqrt{2} = 12$

46 Los exact op.

a $4x - 2x\sqrt{3} = \sqrt{6}$

b $2x\sqrt{2} + x\sqrt{3} = 10$

c $x\sqrt{5} + x\sqrt{2} = \sqrt{10}$

d $x - \sqrt{2} = x\sqrt{3}$

A47 Los exact op.

a $2x\sqrt{6} - 6 = 4\sqrt{6}$

b $x\sqrt{3} + 6 = 2x$

c $3\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 4\sqrt{10}$

d $3x\sqrt{2} - 2x = 6$

Terugblik

Rekenen met wortels

Bij het rekenen met wortels gebruik je de volgende regels.

$\sqrt{A} \cdot \sqrt{B} = \sqrt{AB}$ voor $A \geq 0 \wedge B \geq 0$ en $\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\dfrac{A}{B}}$ voor $A \geq 0 \wedge B > 0$.

Zo is $2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{2} = 10\sqrt{6}$ en $\dfrac{6\sqrt{10}}{3\sqrt{2}} = 2\sqrt{5}$. Verder is $(\frac{1}{4}\sqrt{10})^2 = \frac{1}{16} \cdot 10 = \frac{5}{8}$.

Bij het wegwerken van de haakjes bij $(3 + a\sqrt{2})^2$ krijg je

$(3 + a\sqrt{2})^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot a\sqrt{2} + (a\sqrt{2})^2 = 9 + 6a\sqrt{2} + 2a^2$.

Gebruik
$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Je kunt een factor voor het wortelteken brengen als het getal onder het wortelteken het product is van een kwadraat en een geheel getal. Je gebruikt dat $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

Zo is $\sqrt{45} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ en $\sqrt{80} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

Daarmee is $3\sqrt{80a} - 2\sqrt{45a}$ te herleiden.

$3\sqrt{80a} - 2\sqrt{45a} = 3 \cdot 4\sqrt{5a} - 2 \cdot 3\sqrt{5a} = 12\sqrt{5a} - 6\sqrt{5a} = 6\sqrt{5a}$

Om bij $\dfrac{7}{4 - \sqrt{2}}$ de wortel uit de noemer weg te werken, gebruik je het

merkwaardige product $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Je krijgt $\dfrac{7}{4 - \sqrt{2}} \cdot \dfrac{4 + \sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} = \dfrac{7(4 + \sqrt{2})}{16 - 2} = \frac{1}{2}(4 + \sqrt{2}) = 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Vergelijkingen met wortels

Zowel $6 - x\sqrt{2} = \sqrt{10}$ als $\frac{1}{2}x\sqrt{2} = x - 2$ is een lineaire vergelijking. Deze vergelijkingen los je dus op door de termen met x in het linkerlid te zetten en de overige termen in het rechterlid.

Je krijgt

$$6 - x\sqrt{2} = \sqrt{10}$$
$$-x\sqrt{2} = -6 + \sqrt{10}$$
$$x = \frac{-6}{-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{10}}{-\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{5}$$
$$x = \frac{6\sqrt{2}}{2} - \sqrt{5}$$
$$x = 3\sqrt{2} - \sqrt{5}$$

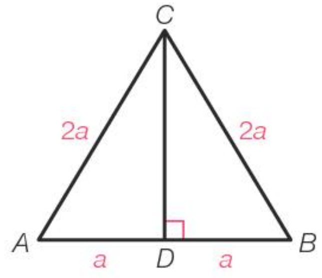
$$\tfrac{1}{2}x\sqrt{2} = x - 2$$
$$\tfrac{1}{2}x\sqrt{2} - x = -2$$
$$x(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - 1) = -2$$
$$x = \frac{-2}{\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1}$$
$$x = \frac{-2}{\frac{1}{2}\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1}{\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1}$$
$$x = \frac{-2(\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1)}{\frac{1}{2} - 1}$$
$$x = 4(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2} + 4$$

3.4 Vergelijkingen in de meetkunde

O48 Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC met zijde $2a$. Zie figuur 3.56.

a Toon aan dat $CD = a\sqrt{3}$.

b Gegeven is $CD = 7\sqrt{3}$. Bereken AC.



figuur 3.56

Theorie A Bijzondere rechthoekige driehoeken

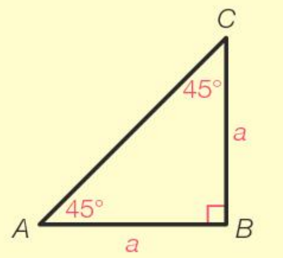
In figuur 3.57 is de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC met rechthoekszijden a getekend.

In $\triangle ABC$ is $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$AC^2 = a^2 + a^2$$
$$AC^2 = 2a^2$$
$$AC = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

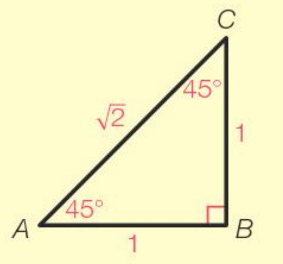
In figuur 3.57 zijn de lengten van de zijden dus a, a en $a\sqrt{2}$.

In een gelijkbenige rechthoekige driehoek is de verhouding van de zijden dus $1 : 1 : \sqrt{2}$.



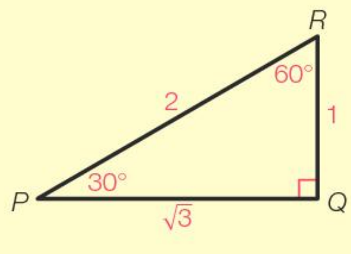
figuur 3.57

De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.



In opgave 48 heb je ontdekt dat de zijden van een halve gelijkzijdige driehoek de lengten a, $2a$ en $a\sqrt{3}$ hebben. De verhouding van de zijden is dus $1 : 2 : \sqrt{3}$.

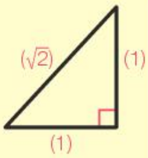
De zijden van een rechthoekige driehoek waarvan de scherpe hoeken 30° en 60° zijn, verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.

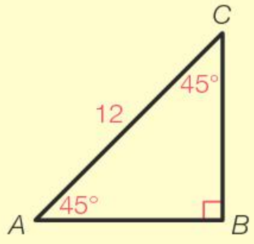


In figuur 3.58 is $AC = 12$.

Dit geeft $AB = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$.

Van AB naar AC keer $\sqrt{2}$,
dus van AC naar AB
gedeeld door $\sqrt{2}$.



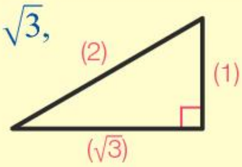


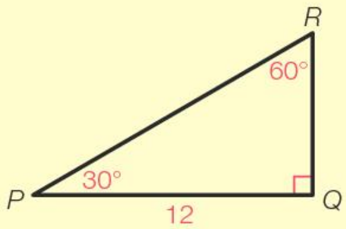
figuur 3.58

In figuur 3.59 is $PQ = 12$.

Dit geeft $QR = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$ en $PR = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

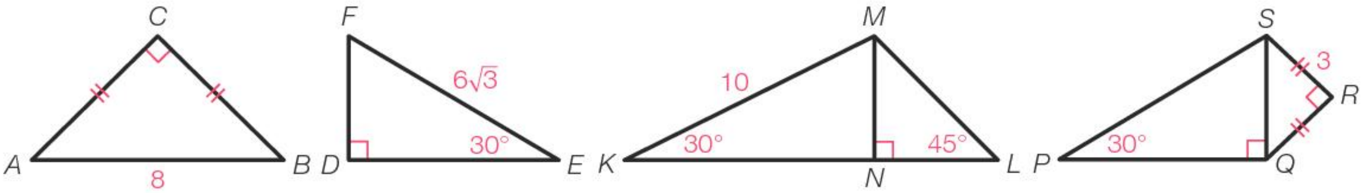
Van QR naar PQ keer $\sqrt{3}$,
dus van PQ naar QR
gedeeld door $\sqrt{3}$.





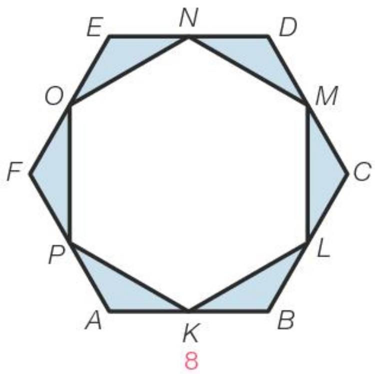
figuur 3.59

49 Zie figuur 3.60.
Bereken AC, DE, KL en PQ.



figuur 3.60

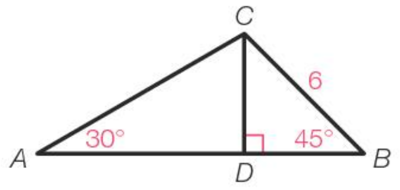
50 In de regelmatige zeshoek $ABCDEF$ met zijde 8 wordt de regelmatige zeshoek $KLMNOP$ getekend. Hierbij zijn K, L, M, N, O en P middens van zijden. Zie figuur 3.61.
Bereken exact de oppervlakte van het gekleurde gebied.



figuur 3.61

A51

Gegeven is driehoek ABC met $BC = 6$, $\angle A = 30°$ en $\angle B = 45°$.
Bewijs dat de oppervlakte van driehoek ABC gelijk is aan $9\sqrt{3} + 9$.



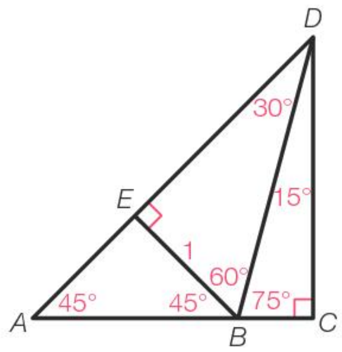
figuur 3.62

A52

Zie figuur 3.63.

a Bewijs met deze figuur dat $\sin(15°) = \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

b Bereken de exacte waarde van $\cos(15°)$.



figuur 3.63

53

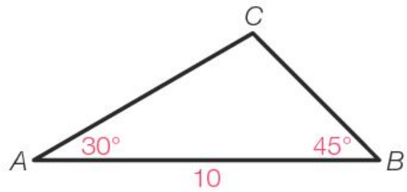
Gegeven is driehoek ABC met $AB = 10$, $\angle A = 30°$ en $\angle B = 45°$. Zie figuur 3.64a.
We willen de oppervlakte van $\triangle ABC$ exact berekenen.
Daartoe tekenen we de hoogtelijn CD en stellen $BD = x$. Zie figuur 3.64b.

a Licht toe dat $AD = x\sqrt{3}$.

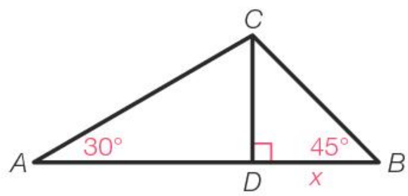
Uit het bovenstaande volgt $x\sqrt{3} + x = 10$.

b Licht dit toe en los de vergelijking exact op.

c Schrijf de oppervlakte van $\triangle ABC$ in de vorm $a + b\sqrt{c}$.



a

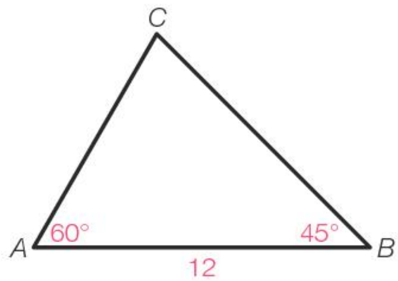


b

figuur 3.64

54

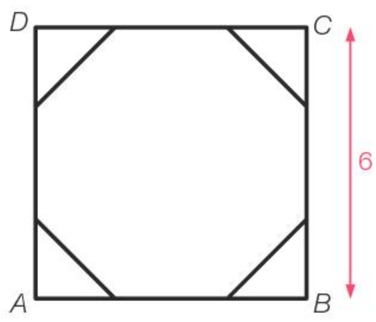
Gegeven is driehoek ABC met $AB = 12$, $\angle A = 60°$ en $\angle B = 45°$.
Bewijs dat de oppervlakte van $\triangle ABC$ gelijk is aan $108 - 36\sqrt{3}$.



figuur 3.65

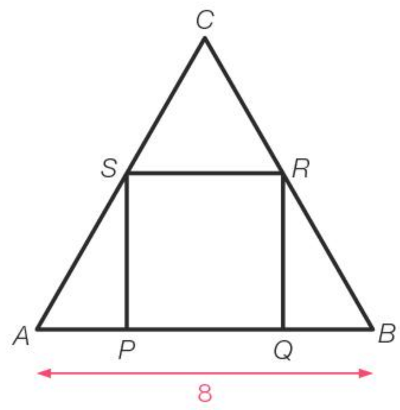
55

Van het vierkant $ABCD$ met zijde 6 worden bij de hoekpunten driehoeken weggelaten waarbij een regelmatige achthoek ontstaat. Zie figuur 3.66.
Bereken exact de zijde van de achthoek.
Schrijf het antwoord in de vorm $a + b\sqrt{c}$.



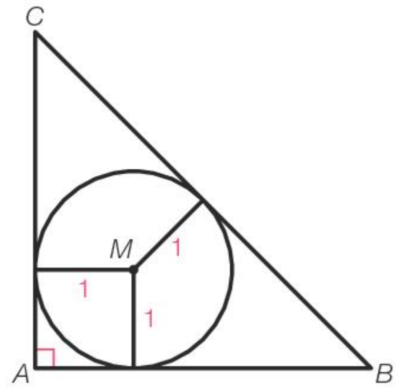
figuur 3.66

A56 Gegeven is de gelijkzijdige driehoek ABC met zijde 8. In de driehoek past precies het vierkant $PQRS$. Zie de figuur hiernaast.
Bewijs dat $PQ = 16\sqrt{3} - 24$.



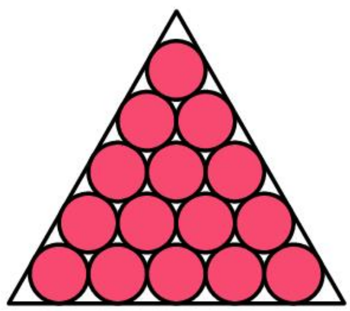
figuur 3.67

A57 De ingeschreven cirkel van de gelijkbenige rechthoekige driehoek ABC in figuur 3.68 heeft straal 1.
Bewijs dat de omtrek van de driehoek gelijk is aan $6 + 4\sqrt{2}$.



figuur 3.68

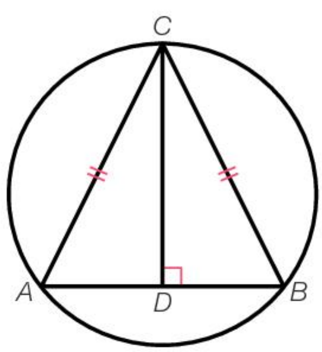
E58 De 15 rode ballen van het snookerspel passen in een frame met zijden van 30 cm. Zie de figuur.
Bereken exact de diameter van één bal.



figuur 3.69

O59 In figuur 3.70 is de gelijkbenige driehoek ABC met $AC = BC$ getekend, waarvan de hoogte CD gelijk is aan AB. Verder is de omgeschreven cirkel van deze driehoek getekend. De straal van deze cirkel is 6. We vragen ons af wat de lengte van AB is.

a Neem figuur 3.70 over en noem het middelpunt van de cirkel M.
b Stel $DM = x$ en licht toe dat hieruit volgt dat $AD = \frac{1}{2}x + 3$.
c Gebruik de stelling van Pythagoras in driehoek ADM en toon aan dat je de vergelijking $1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$ krijgt.
d Los de vergelijking $1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$ op.
Wat is de lengte van AB?



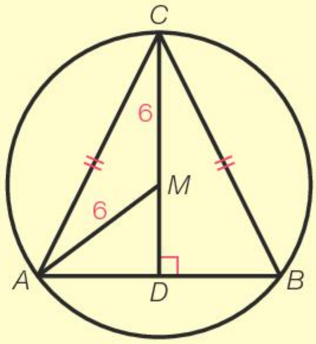
figuur 3.70 De straal van de cirkel is 6 en $AB = CD$.

Theorie B Vergelijkingen en de stelling van Pythagoras

In figuur 3.71 is de cirkel met de gelijkbenige driehoek ABC van opgave 59 nog eens getekend. In opgave 59 is $DM = x$ gesteld om AB te berekenen. Je kunt ook bijvoorbeeld $AD = x$ stellen. Dan is $CD = AB = 2x$, dus $DM = 2x - 6$. De stelling van Pythagoras in driehoek ADM geeft dan

$AD^2 + DM^2 = AM^2$
$x^2 + (2x - 6)^2 = 6^2$
$x^2 + 4x^2 - 24x + 36 = 36$
$5x^2 - 24x = 0$
$x(5x - 24) = 0$
$x = 0 \vee 5x = 24$
$x = 0 \vee x = 4\frac{4}{5}$

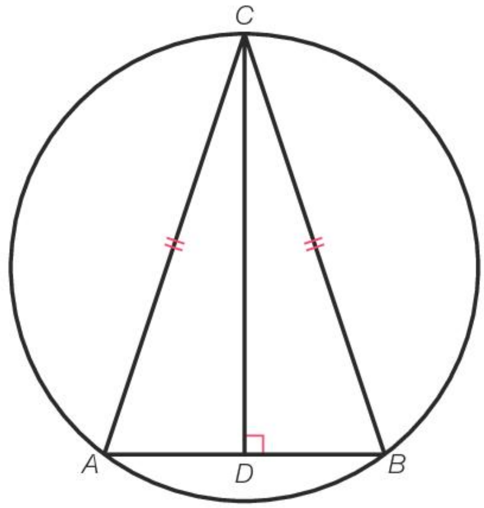
Dus $AD = 4\frac{4}{5}$ en $AB = 2 \cdot 4\frac{4}{5} = 9\frac{3}{5}$.



figuur 3.71 De hoogte CD is gelijk aan AB.

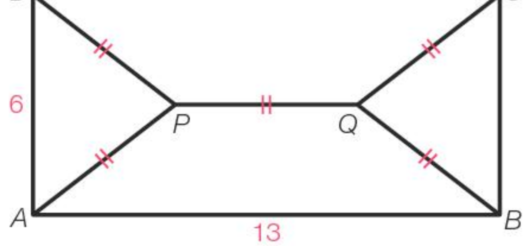
Je ziet dat deze uitwerking eenvoudiger is dan wat je in opgave 59 hebt gedaan.
In het algemeen is het raadzaam om na te gaan welk lijnstuk je x stelt voor een zo eenvoudig mogelijke uitwerking.

60 Gegeven is de cirkel met straal 6 in figuur 3.72. De punten A, B en C liggen op de cirkel waarbij $AC = BC$. Verder is de hoogtelijn CD in $\triangle ABC$ getekend. Er geldt $CD = 1\frac{1}{2}AB$.
Bereken exact de lengte van AB.



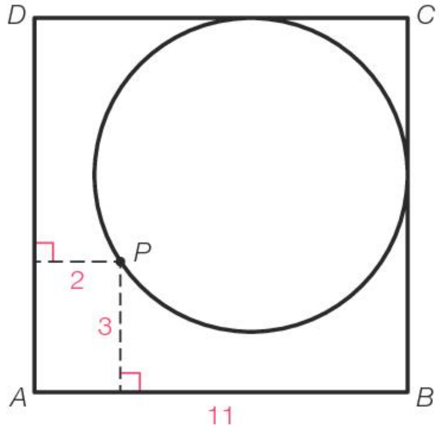
figuur 3.72

61 In de rechthoek $ABCD$ met $AB = 13$ en $AD = 6$ liggen de punten P en Q waarbij $AP = DP = BQ = CQ = PQ$. Zie figuur 3.73.
Bereken exact de lengte van AP.



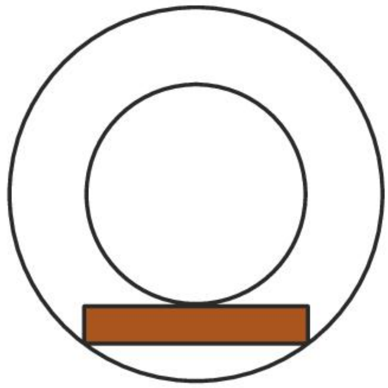
figuur 3.73

62 Gegeven is vierkant $ABCD$ met zijde 11. Binnen het vierkant ligt het punt P op afstand 3 van AB en op afstand 2 van AD.
Bereken exact de straal van de cirkel die door P gaat en de zijden BC en CD raakt.



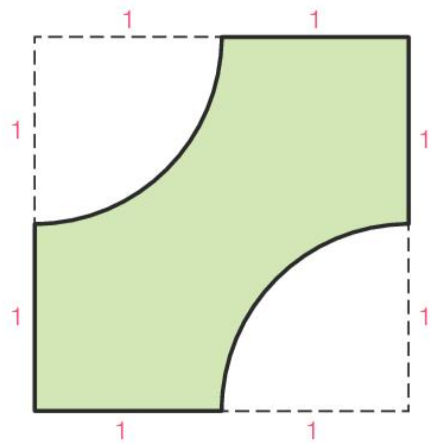
figuur 3.74

A63 In de figuur hiernaast is een ringvormige gracht getekend waarin precies een rechthoekig vlot past. Het vlot is 56 meter lang en half zo breed als de gracht. De straal van de binnencirkel van de gracht is 37 meter.
Hoe breed is de gracht?



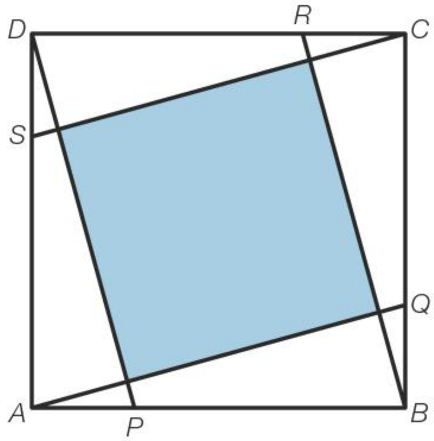
figuur 3.75

A64 Uit een vierkant met zijde 2 worden twee kwartcirkels met straal 1 geknipt zoals in de figuur hiernaast.
Bereken exact de straal van de grootste cirkel die nog op het overgebleven stuk past.



figuur 3.76

E65 Het vierkant $ABCD$ in de figuur hiernaast heeft zijde 1.
De punten P, Q, R en S liggen op de zijden waarbij AQ, BR, CS en DP een vierkant insluiten.
Bereken AP in het geval de oppervlakte van dit vierkant de helft is van de oppervlakte van vierkant $ABCD$.
Schrijf het antwoord in de vorm $a + b\sqrt{c}$.

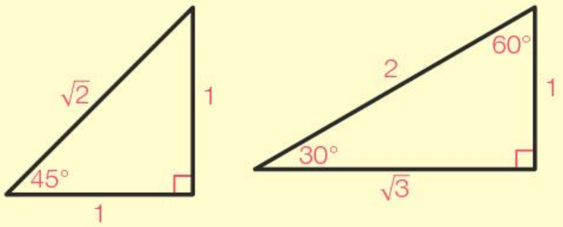


figuur 3.77

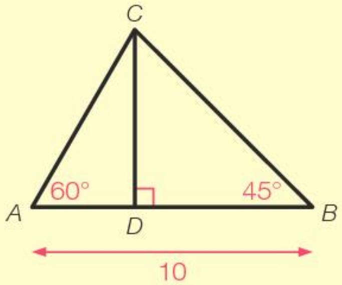
Terugblik

Bijzondere rechthoekige driehoeken

De zijden van een gelijkbenige rechthoekige driehoek verhouden zich als $1 : 1 : \sqrt{2}$.
De zijden van een rechthoekige driehoek met scherpe hoeken van 30° en 60° verhouden zich als $1 : 2 : \sqrt{3}$.

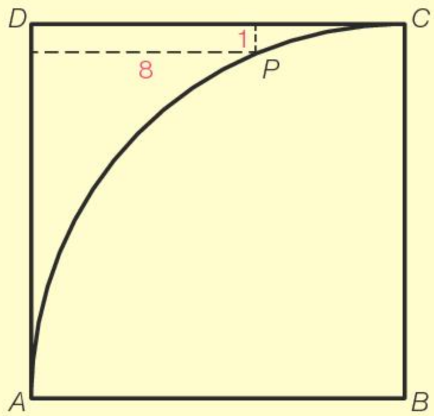


Je gebruikt deze verhoudingen om de oppervlakte van $\triangle ABC$ hiernaast exact te berekenen.
Stel $AD = x$. Dit geeft $CD = x\sqrt{3}$ en $BD = x\sqrt{3}$.
Omdat $AD + BD = 10$ krijg je $x + x\sqrt{3} = 10$.
Dit geeft $x(1 + \sqrt{3}) = 10$ oftewel $x = \dfrac{10}{1 + \sqrt{3}}$,
dus $CD = \dfrac{10}{1 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = \dfrac{10\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$.
Dus $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \dfrac{10\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \dfrac{50\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$
en dit is te herleiden tot $75 - 25\sqrt{3}$.

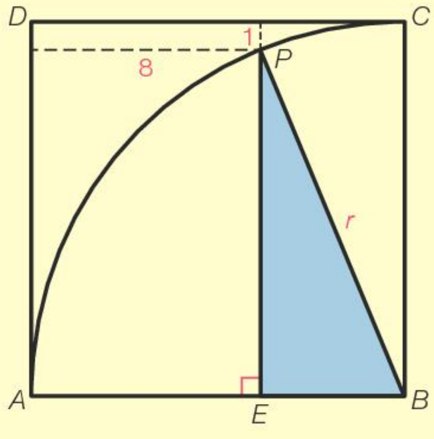


Vergelijkingen en de stelling van Pythagoras

In het vierkant hiernaast is een kwartcirkel getekend met middelpunt B en straal BA. Het punt P op de kwartcirkel heeft afstand 1 tot CD en afstand 8 tot AD.

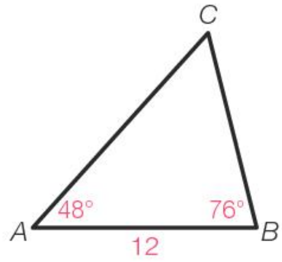


Om de zijde van het vierkant te berekenen gebruiken we de figuur hiernaast.
Stel de straal van de cirkel is r.
Nu geldt $BE = r - 8$ en $PE = r - 1$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle BEP$ geeft
$(r - 8)^2 + (r - 1)^2 = r^2$
$r^2 - 16r + 64 + r^2 - 2r + 1 = r^2$
$r^2 - 18r + 65 = 0$
$(r - 5)(r - 13) = 0$
$r = 5 \vee r = 13$
Omdat $r > 8$ is $r = 13$ en dus ook $AB = 13$.



3.5 De sinusregel en de cosinusregel

O66 Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 12$, $\angle A = 48°$ en $\angle B = 76°$.
Om AC te berekenen kun je gebruik maken van de hoogtelijn AD.
Bereken AC. Rond af op twee decimalen.

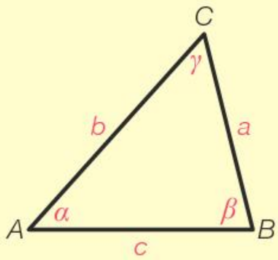


figuur 3.78

Theorie A De sinusregel in scherphoekige driehoeken

In opgave 66 heb je in driehoek ABC de lengte van de zijde AC berekend. Dit deed je door een hoogtelijn te tekenen en dan gebruik te maken van de twee rechthoekige driehoeken die ontstaan. Deze omslachtige manier was nodig omdat driehoek ABC niet gelijkbenig of rechthoekig is. De berekening wordt een stuk eenvoudiger door gebruik te maken van de **sinusregel**.
De sinusregel geldt in elke driehoek.
In opgave 68 geef je het bewijs voor scherphoekige driehoeken.
In de sinusregel hieronder is de zijde tegenover hoek A aangegeven met de letter a en hoek A is aangegeven met α. En b is de zijde tegenover hoek B en c is de zijde tegenover hoek C.

In elke driehoek ABC geldt de sinusregel $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$.



α alfa
β bèta
γ gamma

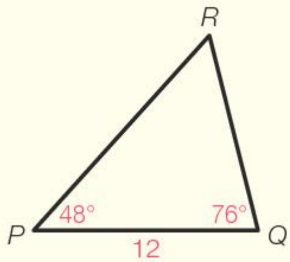
Voorbeeld

Gegeven is $\triangle PQR$ met $PQ = 12$, $\angle P = 48°$ en $\angle Q = 76°$.
Bereken QR. Rond af op één decimaal.

Uitwerking
$\angle R = 180° - 48° - 76° = 56°$
De sinusregel geeft

$$\frac{QR}{\sin(48°)} = \frac{12}{\sin(56°)}$$

$$QR = \frac{12\sin(48°)}{\sin(56°)} \approx 10{,}8$$



67 Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 50°$, $\angle B = 75°$ en $BC = 6{,}8$.

a Bereken $\angle C$.

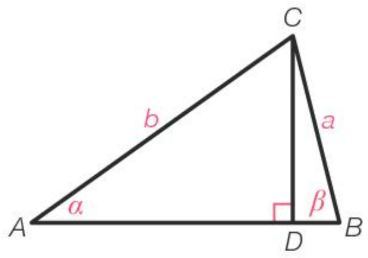
b Bereken AB en AC. Rond af op één decimaal.

68 In deze opgave ga je de sinusregel bewijzen voor scherphoekige driehoeken.

Zie figuur 3.79.

a Licht toe dat $CD = b\sin(\alpha)$ en $CD = a\sin(\beta)$.

b Licht toe dat uit a volgt $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$.



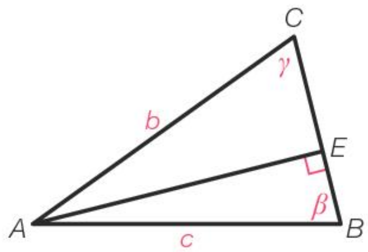
figuur 3.79

Zie figuur 3.80.

c Licht toe dat $AE = c\sin(\beta)$ en $AE = b\sin(\gamma)$.

d Licht toe dat uit c volgt $\dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$.

e Hoe volgt uit b en d de sinusregel?



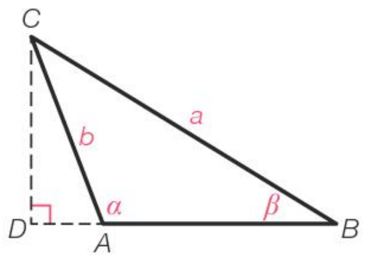
figuur 3.80

O69 In figuur 3.81 is de stomphoekige driehoek ABC getekend.

a Licht toe dat $CD = b\sin(180° - \alpha)$.

b Licht toe dat $CD = a\sin(\beta)$.

c Licht toe dat uit a en b volgt $\dfrac{a}{\sin(180° - \alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$.

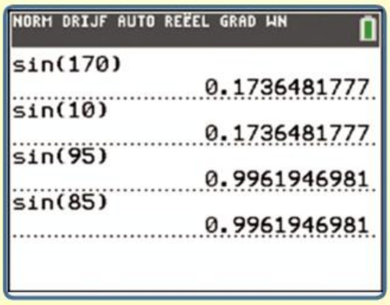


figuur 3.81

Theorie B De sinusregel in stomphoekige driehoeken

$\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$

In hoofdstuk 8 zal je zien dat $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$.
Dus bijvoorbeeld $\sin(170°) = \sin(10°)$ en $\sin(95°) = \sin(85°)$.
Zie het GR-scherm hiernaast.



In opgave 69 heb je gezien dat $\dfrac{a}{\sin(180° - \alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)}$.

Hieruit volgt dat de sinusregel ook geldt in stomphoekige driehoeken.

70 Van $\triangle KLM$ is $\angle K = 20°$, $\angle L = 110°$ en $LM = 5{,}3$.
Bereken KL en KM. Rond af op één decimaal.

71 Van $\triangle ABC$ is $\alpha = 50°$, $a = 5$ en $b = 6$.
Er zijn twee driehoeken ABC mogelijk.

a Teken de twee mogelijke driehoeken. Gebruik een passer.

Noem de driehoek met de scherpe hoek B driehoek 1 en de driehoek met de stompe hoek B driehoek 2.

b Bereken voor driehoek 1 de hoeken β en γ en zijde c. Rond af op één decimaal.

c Bereken voor driehoek 2 de hoeken β en γ en zijde c. Rond af op één decimaal.

72 Van $\triangle ABC$ is $\angle B = 46°$, $BC = 10$ en $AC = 8$.

a Bereken beide mogelijkheden voor $\angle A$.

b Bereken beide mogelijkheden voor AB.

c Judith wil een driehoek tekenen met $\angle B = 46°$, $BC = 10$ en $AC = 7$. Waarom is dit niet mogelijk?

A73 Bij de gegevens $\alpha = 30°$ en $b = 6$ hangt het van de waarde van a af of er

- geen driehoek ABC mogelijk is
- één driehoek ABC mogelijk is
- twee driehoeken ABC mogelijk zijn.

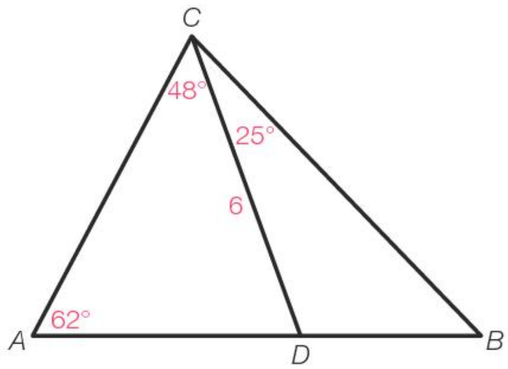
Wat weet je van de waarden van a waarvoor

a er geen driehoek ABC mogelijk is

b er precies één driehoek ABC mogelijk is

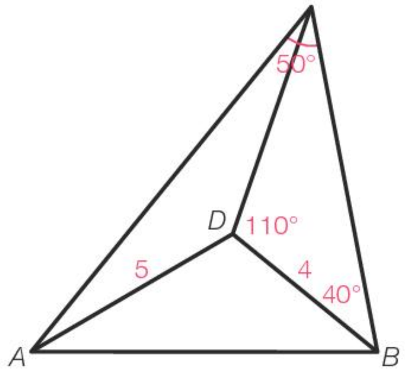
c er twee driehoeken ABC mogelijk zijn?

A74 Bereken de omtrek van driehoek ABC in figuur 3.82. Rond af op één decimaal.



figuur 3.82

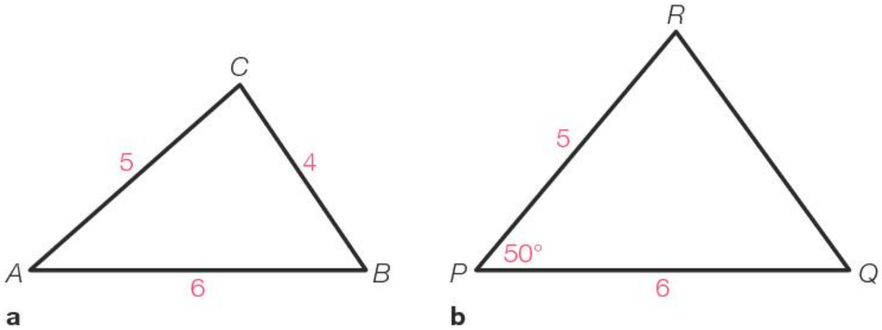
A75 Gegeven is $\triangle ABC$ met $\angle C = 50°$.
Binnen driehoek ABC ligt het punt D zo, dat $AD = 5$, $BD = 4$, $\angle BDC = 110°$ en $\angle CBD = 40°$.
Bereken AC. Rond af op twee decimalen.



figuur 3.83

076 **a** Waarom kun je hoek A in figuur 3.84a niet met de sinusregel berekenen?

b Waarom kun je QR in figuur 3.84b niet met de sinusregel berekenen?



figuur 3.84

077 In figuur 3.85 zie je $\triangle ABC$ met de zijden a, b en c en de hoogtelijn CD. Er is $AD = x$ gesteld, dus $BD = c - x$.

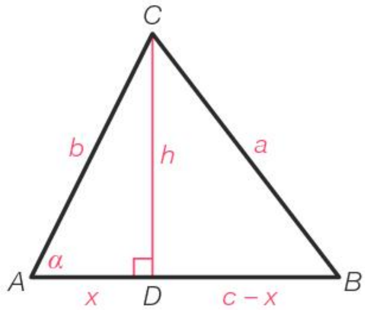
a Licht toe dat $x^2 + h^2 = b^2$.

b Licht toe dat $a^2 = c^2 - 2cx + x^2 + h^2$.

c Licht toe dat uit a en b volgt $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$.

d Licht toe dat $x = b\cos(\alpha)$.

e Licht toe dat uit c en d volgt $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.



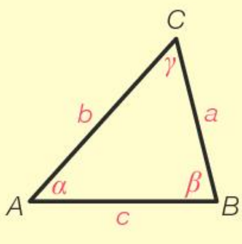
figuur 3.85

Theorie C De cosinusregel

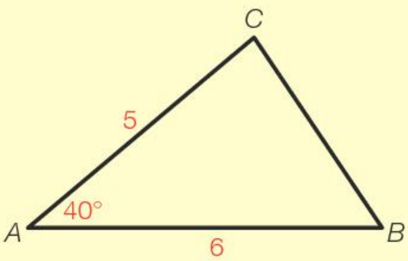
In opgave 77 heb je een van de drie versies van de **cosinusregel** bewezen. Het bewijs van de andere versies gaat net zo.

In elke driehoek ABC geldt de cosinusregel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$



Je kunt met de cosinusregel een zijde van een driehoek berekenen als de twee andere zijden en de ingesloten hoek zijn gegeven. Zo krijg je in $\triangle ABC$ hiernaast $BC^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(40°)$ en dit geeft $BC \approx 3{,}88$.

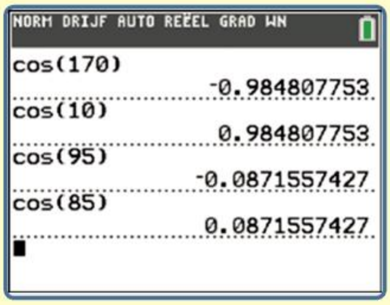


figuur 3.86

Ook kun je met de cosinusregel een hoek van een driehoek berekenen als de drie zijden van de driehoek zijn gegeven. Zie het voorbeeld hieronder.

In hoofdstuk 8 zal je zien dat $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$. Je gebruikt dit in opgave 78 bij het bewijs van de cosinusregel in stomphoekige driehoeken.
Uit de regel $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$ volgt bijvoorbeeld $\cos(170°) = -\cos(10°)$ en $\cos(95°) = -\cos(85°)$. Zie het GR-scherm hiernaast.
Omdat de cosinus van elke scherpe hoek positief is en van elke stompe hoek negatief, hoort bij iedere waarde van de cosinus precies één hoek. De GR geeft dus altijd de hoek die je zoekt.
Zo krijg je bij $\cos(\alpha) = -0{,}6$ dat $\alpha \approx 126{,}9°$.

$\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$

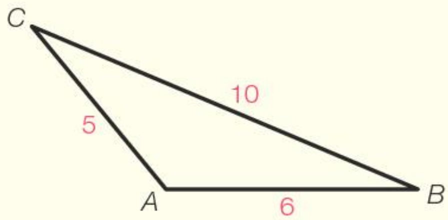


Voorbeeld

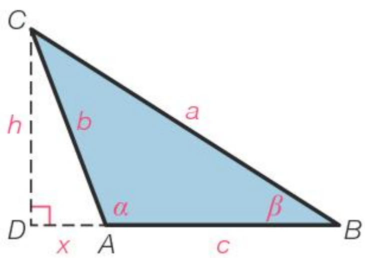
Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 6$, $AC = 5$ en $BC = 10$.
Bereken $\angle A$.

Uitwerking
De cosinusregel geeft

$10^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(\angle A)$
$100 = 25 + 36 - 60\cos(\angle A)$
$60\cos(\angle A) = -39$
$\cos(\angle A) = -\frac{39}{60}$
$\angle A \approx 130{,}5°$



78 In figuur 3.87 is de stomphoekige driehoek ABC getekend.
- **a** Licht toe dat $x^2 + h^2 = b^2$ en $a^2 = c^2 + 2cx + x^2 + h^2$.
- **b** Licht toe dat uit a volgt dat $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$.
- **c** Licht toe dat $x = b\cos(180° - \alpha)$.
- **d** Licht toe: omdat $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$, geldt de cosinusregel ook voor stomphoekige driehoeken.



figuur 3.87

79
- **a** Van $\triangle ABC$ is $AB = 7$, $AC = 6$ en $BC = 5$.
Bereken de hoeken van $\triangle ABC$.
- **b** Gegeven is $\triangle DEF$ met $DE = 5$, $EF = 4$ en $DF = 7$.
Bereken de hoeken van $\triangle DEF$.

80

a Van $\triangle ABC$ is $AC = 4$, $BC = 6$ en $\angle C = 60°$.
Bereken AB.

b Van $\triangle PQR$ is $PQ = 4$, $QR = 3$ en $\angle Q = 150°$.
Bereken PR. Rond af op twee decimalen.

A81

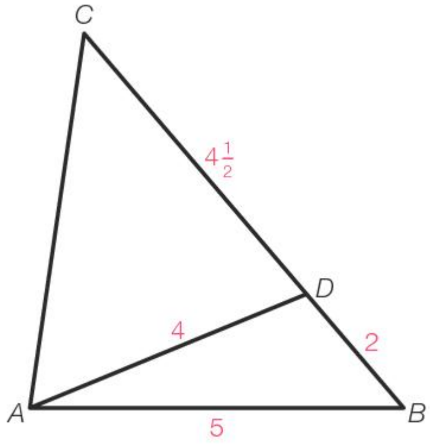
Van parallellogram $ABCD$ is $AB = 10$. De lengte van diagonaal AC is 14 en de lengte van diagonaal BD is 9.

a Bereken BC. Rond af op één decimaal.

b Bereken de oppervlakte van $ABCD$. Rond af op één decimaal.

A82

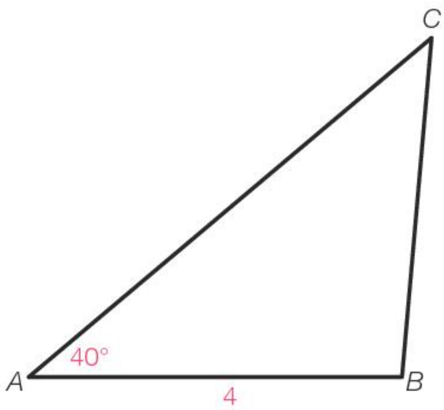
Van $\triangle ABC$ is $AB = 5$ en $BC = 6\frac{1}{2}$. Het punt D ligt op BC zo, dat $BD = 2$. Verder is gegeven dat $AD = 4$. Zie figuur 3.88.
Bereken exact AC.



figuur 3.88

A83

Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 40°$ en $AB = 4$.
De lengte van AC is 2 meer dan de lengte van BC.
Zie figuur 3.89.
Bereken BC en AC. Rond af op drie decimalen.

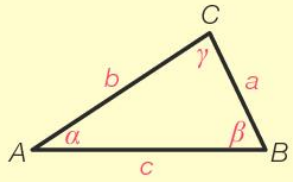


figuur 3.89

Terugblik

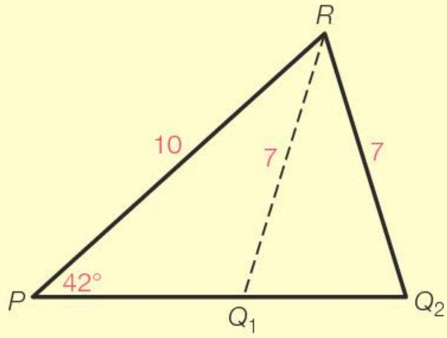
De sinusregel

In elke driehoek ABC is $\dfrac{a}{\sin(\alpha)} = \dfrac{b}{\sin(\beta)} = \dfrac{c}{\sin(\gamma)}$.



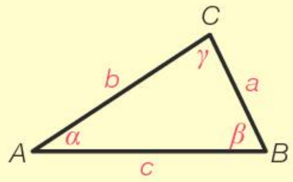
Dit is de sinusregel.
Om de sinusregel te kunnen gebruiken, moet in elk geval een zijde met de overstaande hoek zijn gegeven.

Soms zijn bij de gegevens twee driehoeken mogelijk.
Is van driehoek PQR gegeven dat $\angle P = 42°$, $PR = 10$ en $QR = 7$, dan kan $\angle Q$ scherp zijn, maar ook stomp.
Uit $\dfrac{7}{\sin(42°)} = \dfrac{10}{\sin(\angle Q)}$ volgt $\sin(\angle Q) = \dfrac{10\sin(42°)}{7}$.
Dit geeft $\angle Q \approx 72{,}9°$, maar ook
$\angle Q \approx 180° - 72{,}9° = 107{,}1°$.
Bij $\angle Q \approx 72{,}9°$ hoort $\angle R \approx 180° - 42° - 72{,}9° = 65{,}1°$
en bij $\angle Q \approx 107{,}1°$ hoort
$\angle R \approx 180° - 42° - 107{,}1° = 30{,}9°$.

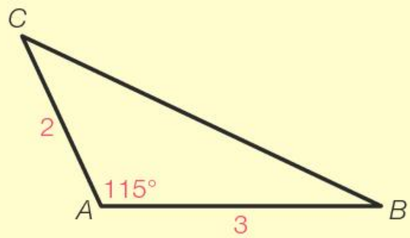


De cosinusregel

In elke driehoek ABC is
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.
Dit is de cosinusregel.

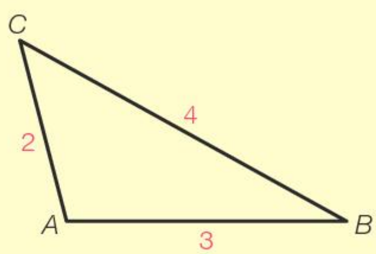


Je kunt met de cosinusregel een zijde berekenen als de twee andere zijden zijn gegeven en de overstaande hoek.
Zo is in de figuur hiernaast de zijde BC te berekenen.
Je krijgt $BC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos(115°) = 18{,}07...$
en dit geeft $BC \approx 4{,}25$.



Ook kun je met de cosinusregel een hoek berekenen als de drie zijden zijn gegeven.
Zo is in de figuur hiernaast $\angle A$ te berekenen.
Je krijgt $4^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos(\angle A)$

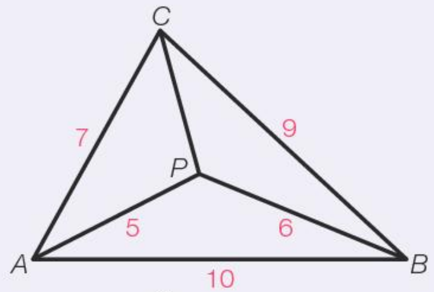
$$16 = 9 + 4 - 12\cos(\angle A)$$
$$12\cos(\angle A) = -3$$
$$\cos(\angle A) = \frac{-3}{12}$$
$$\angle A \approx 104{,}5°$$



Eindopdracht Afstanden in driehoeken

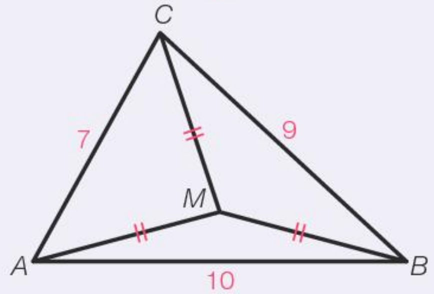
In de beginopdracht van dit hoofdstuk heb je de afstand van een punt P binnen een driehoek tot een hoekpunt van deze driehoek berekend. Dat is daar gelukt, omdat een van de hoeken van de driehoek recht is. In dit hoofdstuk heb je geleerd te werken met de sinusregel en de cosinusregel, en daarom kun je nu deze berekening ook uitvoeren in een driehoek die niet rechthoekig is.

In de figuur hiernaast zie je driehoek ABC met $AB = 10$, $BC = 9$ en $AC = 7$. Binnen de driehoek ligt het punt P zo, dat $AP = 5$ en $BP = 6$.



- Bereken CP. Rond af op twee decimalen.

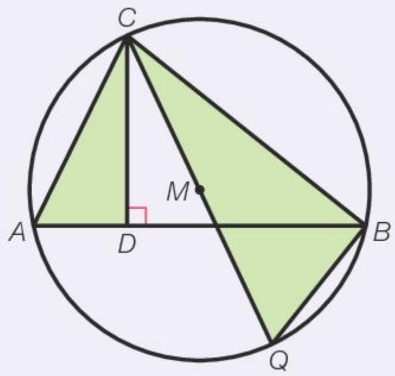
In de figuur hiernaast is driehoek ABC weer getekend met daarin het punt M zo, dat $AM = BM = CM$. Dat betekent dat het punt M het middelpunt is van de omgeschreven cirkel van de driehoek, dus dat M het snijpunt is van de middelloodlijnen van de zijden van de driehoek.



- Bewijs dat M het snijpunt is van de middelloodlijnen van de zijden van de driehoek.

De straal R van de omgeschreven cirkel (dus AM, BM en CM) van de driehoek is te berekenen met de formule $R = \dfrac{abc}{4 \cdot O(\triangle ABC)}$. Hierin zijn a, b en c de zijden van de driehoek.

- Bereken R. Rond af op drie decimalen.
- Bewijs de formule $R = \dfrac{abc}{4 \cdot O(\triangle ABC)}$.
  Gebruik de figuur hiernaast waarin geldt $\triangle ADC \backsim \triangle QBC$.



Een andere formule om de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC te berekenen is

$$R = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

- Bereken met deze formule de exacte waarde van de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC. Controleer daarna of dit overeenkomt met de benaderde waarde die je hierboven hebt gevonden.

Uit de twee formules van R volgt dat
$O(\triangle ABC) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$.
Deze formule wordt ook wel geschreven als $O(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.
Hierin is s de halve omtrek van de driehoek.

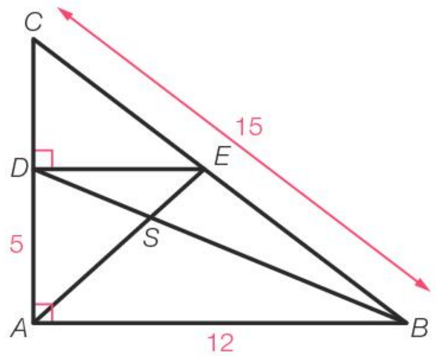
- Bewijs dat $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Diagnostische toets

3.1 Berekeningen in driehoeken

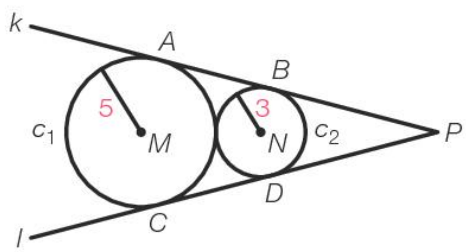
1 Gegeven is driehoek ABC met $\angle B = 90°$. Het punt M is het midden van BC en $\angle BAM = 28°$.
Bereken $\angle CAM$.

2 Van driehoek ABC is $\angle A = 90°$, $AB = 12$ en $BC = 15$. Het punt D ligt op AC waarbij $AD = 5$. Het punt E ligt op BC waarbij $\angle CDE = 90°$. Het snijpunt van AE en BD is S. Zie figuur 3.90.
Bereken BS.



figuur 3.90

3 Cirkel c_1 met middelpunt M en straal 5 raakt cirkel c_2 met middelpunt N en straal 3. De lijn k door het punt P raakt c_1 in het punt A en c_2 in het punt B. De lijn l door P raakt c_1 in het punt C en c_2 in het punt D. Zie figuur 3.91.
Bereken exact de lengte van AP.

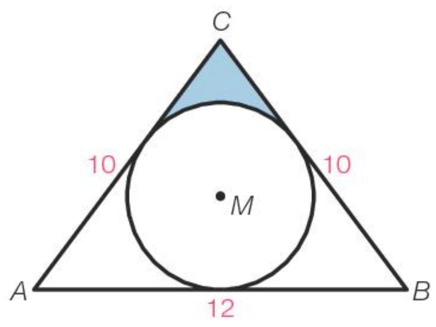


figuur 3.91

3.2 Lengte, omtrek en oppervlakte

4 In figuur 3.92 zie je de gelijkbenige driehoek ABC met $AC = BC = 10$ en $AB = 12$, en zijn ingeschreven cirkel met middelpunt M.
Uit de gegevens volgt dat de straal van de ingeschreven cirkel 3 is.

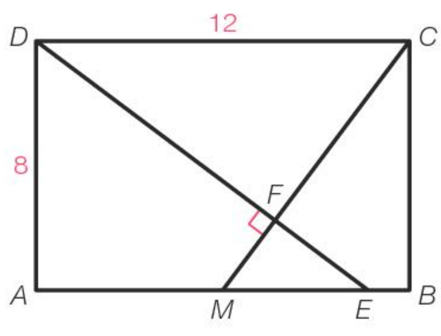
- **a** Toon dit aan.
- **b** Bereken de oppervlakte van het blauwe gebied. Rond af op twee decimalen.



figuur 3.92

5 Gegeven is rechthoek $ABCD$ met $AB = 12$ en $AD = 8$. Het punt M is het midden van AB. Het punt E ligt zo op AB, dat DE en CM elkaar loodrecht snijden in het punt F. Zie figuur 3.93.

- **a** Bereken DF.
- **b** Bereken EM.



figuur 3.93

3.3 Rekenen met wortels

6 Herleid.

a $\sqrt{45} - \frac{8}{\sqrt{5}}$

b $\sqrt{18a} + \sqrt{\frac{2}{9}a}$

c $\sqrt{12\frac{1}{2}} - \sqrt{4\frac{1}{2}}$

d $\frac{3\sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}}$

e $(2a\sqrt{5} - 3)(2a\sqrt{5} + 3)$

f $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$

7 Los op.

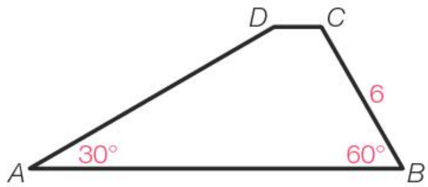
a $x\sqrt{3} + 4 = \sqrt{6}$

b $2x\sqrt{3} + 3x - 12 = 0$

c $2x\sqrt{2} + x\sqrt{6} = \sqrt{3}$

3.4 Vergelijkingen in de meetkunde

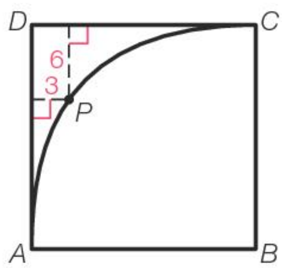
8 Gegeven is het trapezium $ABCD$ met $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ en $BC = 6$. De oppervlakte van het trapezium is 36. Zie figuur 3.94.
Bereken exact de lengte van AB.



figuur 3.94

9 In rechthoek $ABCD$ met omtrek 10 past precies de gelijkzijdige driehoek ABM waarbij M het midden van CD is.
Bewijs dat de omtrek van driehoek ABM gelijk is aan $60 - 30\sqrt{3}$.

10 Gegeven is vierkant $ABCD$. In het vierkant is een kwartcirkel getekend met middelpunt B en straal BA. Het punt P op de kwartcirkel heeft afstand 6 tot CD en afstand 3 tot AD. Zie figuur 3.95.
Bereken exact de oppervlakte van het vierkant.



figuur 3.95

3.5 De sinusregel en de cosinusregel

11 Van driehoek ABC is $\angle A = 40°$, $\angle B = 55°$ en $BC = 6$.
Bereken de oppervlakte van driehoek ABC. Rond af op twee decimalen.

12 Van driehoek ABC is $\angle A = 50°$ en $AB = 10$.

a Neem $BC = 8{,}5$ en bereken beide mogelijkheden voor $\angle B$.

b Wat weet je van de lengte van BC als er precies één driehoek mogelijk is? Rond zo nodig af op twee decimalen.

13 Van driehoek PQR is $PQ = 4$, $PR = 5$ en $QR = 6$. Het punt M is het midden van QR.
Bereken $\angle PMR$.

14 Van parallellogram $ABCD$ is $AB = 15$ en $AD = 8$. Verder is $BD = 10$.

a Bereken de oppervlakte van het parallellogram. Rond af op twee decimalen.

b Bereken de lengte van diagonaal AC. Rond af op één decimaal.

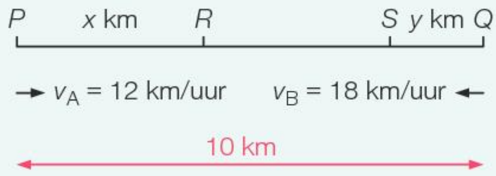
4

Vergelijkingen en herleidingen

Wat leer je?

- Oplossen van stelsels vergelijkingen.
- Algebraïsch oplossen van hogeregraadsvergelijkingen.
- Regels voor het oplossen van allerlei soorten vergelijkingen.
- Herleiden van gebroken vormen.
- Werken met inverse functies.

Beginopdracht Hardlopen en fietsen

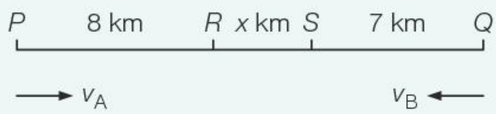


Anna en Bram maken gebruik van hetzelfde parcours van 10 km. Anna loopt met een constante snelheid van 12 km/uur en Bram fietst met een constante snelheid van 18 km/uur.
In de figuur hiernaast zie je het parcours. Anna begint bij P en loopt naar Q. Daar aangekomen loopt zij direct terug naar P. Bram start op hetzelfde tijdstip als Anna in Q, fietst naar P en fietst daarna direct terug naar Q. Daardoor komen ze elkaar twee keer tegen: de eerste keer in R en de tweede keer in S.
We vragen ons af hoeveel de afstand tussen P en R is en hoeveel de afstand tussen Q en S is.
We stellen $PR = x$ km en $QS = y$ km. De tijd die Anna erover doet om van P in R te komen is t_A en de tijd die Bram erover doet om van Q in R te komen is t_B.
Er geldt $t_A = \frac{x}{12}$ en $t_B = \frac{10 - x}{18}$.

- Bereken de afstand tussen P en R.

Om de afstand tussen Q en S te berekenen, druk je de tijd die Anna erover doet om van R via Q in S te komen en de tijd die Bram erover doet om van R via P in S te komen uit in y.

- Bereken de afstand tussen Q en S.



We bekijken nu de volgende situatie. Zie de figuur hiernaast.
De snelheden van de personen A en B zijn niet bekend. A gaat van P via Q direct terug naar P.
B vertrekt op hetzelfde moment als A en gaat van Q via P direct terug naar Q.
De eerste keer komen A en B elkaar tegen in R en de tweede keer in S.
Er geldt $PR = 8$ km en $QS = 7$ km. De afstand tussen R en S is x km.
Omdat ze elkaar tegenkomen in R geldt $v_A = \frac{8}{x+7} \cdot v_B$ en omdat ze elkaar tegenkomen in S geldt $\frac{x+14}{v_A} = \frac{x+16}{v_B}$.

- Licht dit toe en bereken de afstand tussen P en Q.

We bekijken nu het volgende probleem.
De plaatsen A en B zijn verbonden door een weg. Op hetzelfde tijdstip vertrekt een auto uit A richting B en een auto uit B richting A. Ze rijden beide met constante snelheid. Ze passeren elkaar op een afstand van 7 km van A en rijden door. Bij aankomst in B respectievelijk A keren de auto's zonder tijdverlies om en gaan terug. Ze passeren elkaar voor de tweede keer op een afstand van 4 km van B.

- Bereken de afstand tussen A en B.

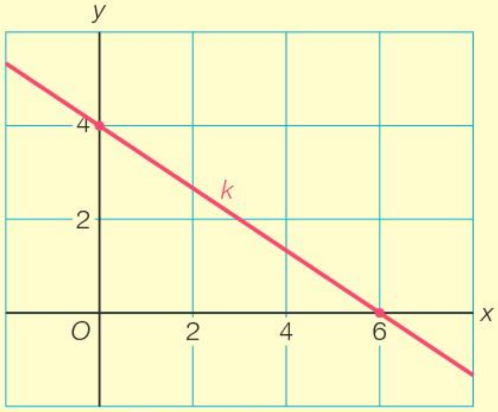
Voorkennis Stelsels lineaire vergelijkingen

Theorie A Lineaire vergelijkingen met twee variabelen

De algemene vorm van een lineaire vergelijking met de variabelen x en y is $ax + by = c$. De bijbehorende grafiek is een rechte lijn.
Om de lijn k: $2x + 3y = 12$ te tekenen, maak je een tabel met twee punten, bijvoorbeeld

x	0	6
y	4	0

De getallenparen $(x, y) = (0, 4)$ en $(x, y) = (6, 0)$ zijn oplossingen van de vergelijking $2x + 3y = 12$.



figuur 4.1 De lijn k: $2x + 3y = 12$.

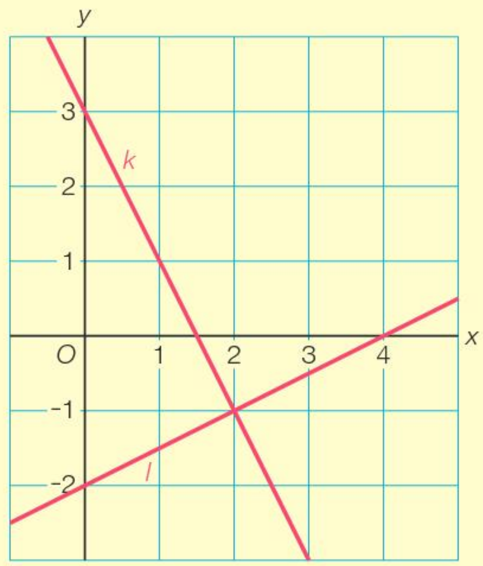
Je kunt bij de vergelijking $2x + 3y = 12$ de variabele y vrijmaken.
$2x + 3y = 12$
$3y = -2x + 12$
$y = -\frac{2}{3}x + 4$
Hieruit lees je af: de lijn k heeft $\text{rc}_k = -\frac{2}{3}$ en snijdt de y-as in het punt $(0, 4)$.
Met $y = -\frac{2}{3}x + 4$ is y uitgedrukt in x.
We zeggen ook: y is als functie van x geschreven.

1 Gegeven zijn de lijnen l: $3x - y = 6$, m: $x + y = 1$, n: $x - y = 0$ en p: $x + 2y = 4$.
- **a** Teken deze lijnen in één figuur.
- **b** Geef van elk van deze lijnen de richtingscoëfficiënt.

2 Gegeven is de lijn l: $4x - 3y = 24$.
- **a** Bereken de coördinaten van de snijpunten van l met de x-as en met de y-as.
- **b** Onderzoek welke van de punten $A(8, 3)$, $B(18, 16)$ en $C(-30, -48)$ op l liggen.
- **c** Het getallenpaar $(x, y) = (16, p)$ is oplossing van de vergelijking $4x - 3y = 24$.
  Bereken p.
- **d** Voor welke q is $(x, y) = (q, 48)$ een oplossing van de vergelijking $4x - 3y = 24$?

Theorie B Stelsels vergelijkingen

In figuur 4.2 zijn de lijnen k: $2x + y = 3$ en l: $x - 2y = 4$ getekend.
Het punt $(2, -1)$ is het snijpunt van deze lijnen.
Het getallenpaar $(x, y) = (2, -1)$ is zowel oplossing van $2x + y = 3$ als van $x - 2y = 4$.
We zeggen dat $(x, y) = (2, -1)$ oplossing is van het stelsel $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$



figuur 4.2

Het oplossen van een stelsel gaat in vier stappen.

1 Maak bij een van de twee vergelijkingen x of y vrij.
2 Substitueer de vrijgemaakte variabele in de andere vergelijking en los de verkregen vergelijking op.
  Je hebt nu een van de variabelen berekend.
3 Gebruik het antwoord van stap 1 om de andere variabele te berekenen.
4 Schrijf de oplossing van het stelsel op.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ op.

Uitwerking

Uit $2x + y = 3$ volgt $y = -2x + 3$.

$y = -2x + 3$ en $x - 2y = 4$ geeft
$$\begin{aligned} x - 2(-2x + 3) &= 4 \\ x + 4x - 6 &= 4 \\ 5x &= 10 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$x = 2$ en $y = -2x + 3$ geeft $y = -2 \cdot 2 + 3 = -1$.
De oplossing is $(x, y) = (2, -1)$.

3 Los op.

a $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ x - 4y = 11 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} x - 6y = 1 \\ 5x + 4y = 56 \end{cases}$

4 Gegeven zijn de lijnen k: $2x - 3y = 12$ en l: $x + 5y = 5$.

a Teken k en l in één figuur.
b Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

4.1 Stelsels vergelijkingen

01 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases}$
Maak bij een van de vergelijkingen x vrij en los het stelsel op met behulp van een substitutie.

Theorie A Elimineren door optellen of aftrekken

Elimineren betekent wegwerken.

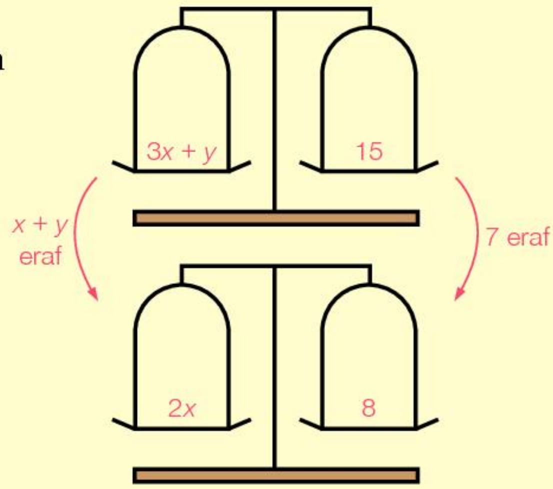
Je hebt geleerd hoe je een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen kunt oplossen met behulp van **elimineren door substitutie**.
Je maakt bij een van de vergelijkingen een van de variabelen vrij en substitueert de vrijgemaakte variabele in de andere vergelijking.
Soms gaat dit moeizaam, zoals bijvoorbeeld in opgave 1.
Daarom leer je nu een andere manier om een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen op te lossen.
Deze manier heet **elimineren door optellen of aftrekken**.
Bij het stelsel $\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + y = 7 \end{cases}$ trek je de vergelijkingen van elkaar af, want dan valt de y weg.

$$\begin{cases} 3x + y = 15 \\ x + y \;\;= 7 \end{cases} \quad -$$

$$2x \quad = 8 \longleftarrow \boxed{y \text{ is geëlimineerd.}}$$

$$x = 4$$

$x = 4$ en $x + y = 7$ geeft $4 + y = 7$, dus $y = 3$.
De oplossing van het stelsel is $(x, y) = (4, 3)$.
Dat je de vergelijkingen $3x + y = 15$ en $x + y = 7$ van elkaar af mag trekken, wordt verduidelijkt in de figuur hiernaast.



figuur 4.3 Weer in evenwicht, want links en rechts is hetzelfde eraf gehaald, immers $x + y = 7$.

Bij het stelsel $\begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases}$ van opgave 1 tel je de vergelijkingen op, want dan wordt y geëlimineerd.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 7x + 4y = 1 \\ 5x - 4y = 11 \end{cases} \\ \hline 12x = 12 \quad \longleftarrow \boxed{7x + 5x = 12x} \\ x = 1 \end{array} +$$

$x = 1$ en $7x + 4y = 1$ geeft $7 \cdot 1 + 4y = 1$ en dit geeft $y = -1\frac{1}{2}$.
Dus $(x, y) = (1, -1\frac{1}{2})$ is de oplossing van het stelsel.

Kijk, voordat je gaat optellen of aftrekken, goed naar het stelsel wat het handigst is.
Zo ga je bij het stelsel $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ optellen, want dan wordt y geëlimineerd. Met aftrekken schiet je hier niets op.

En bij het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = 15 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$ ga je aftrekken. Hier schiet je met optellen niets op.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$ algebraïsch op.

Uitwerking

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases} \\ \hline 2y = -8 \quad \longleftarrow \boxed{-3x - -5y = 2y} \end{array} -$$

$$\left.\begin{array}{r} y = -4 \\ 2x - 3y = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x - 3 \cdot -4 = -5 \\ 2x = -17 \\ x = -8\frac{1}{2} \end{array}$$

De oplossing is $(x, y) = (-8\frac{1}{2}, -4)$.

2

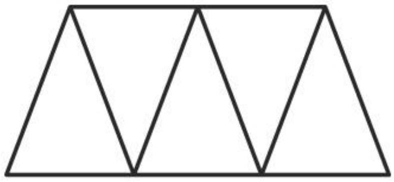
Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} 5x - 4y = -8 \\ -x + 4y = -12 \end{cases}$

b $\begin{cases} -2x + y = 7 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$

c $\begin{cases} -x - 3y = -8 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$

A3 De figuur hiernaast is opgebouwd uit vijf gelijkbenige driehoeken.
De omtrek van één zo'n driehoek is 14 en de omtrek van de figuur is 30.
Bereken de zijden van de gelijkbenige driehoeken.



figuur 4.4

E4 Los het volgende stelsel op.

$$\begin{cases} a+b+c=20 \\ a+b+d=24 \\ a+c+d=25 \\ b+c+d=27 \end{cases}$$

O5 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 2x+3y=16 \end{cases}$

a Tel de vergelijkingen van het stelsel bij elkaar op.
Is na het optellen een van de variabelen geëlimineerd?

b Trek de vergelijkingen van het stelsel van elkaar af.
Is na het aftrekken een van de variabelen geëlimineerd?

c Bedenk een manier om toch één van de variabelen te elimineren.

Theorie B Elimineren na vermenigvuldigen

In opgave 5 valt zowel bij het optellen als bij het aftrekken geen van de variabelen weg. Maar als je de eerste vergelijking met 2 vermenigvuldigt en de tweede vergelijking met 3, dan staat in beide vergelijkingen $6x$ en dan wordt bij aftrekken de variabele x wel geëlimineerd.

Je krijgt $\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 2x+3y=16 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 6x-8y=14 \\ 6x+9y=48 \end{cases}$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad}\,-$$
$$-17y=-34$$

Tussen de verticale strepen staan de getallen waarmee vermenigvuldigd is.

Je kunt bij dit stelsel ook y elimineren. Dit gaat als volgt.

$\begin{cases} 3x-4y=7 \\ 2x+3y=16 \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 9x-12y=21 \\ 8x+12y=64 \end{cases}$

$$\underline{\qquad\qquad\qquad}\,+$$
$$17x \qquad = 85$$

Ga bij het oplossen van een stelsel eerst na welke variabele je het beste kunt elimineren. Doe het zo, dat je zo weinig mogelijk rekenwerk krijgt.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ algebraïsch op.

Uitwerking

$\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \end{vmatrix}$ geeft $\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ 12x - 8y = 16 \end{cases}$ +

$14x = 21$

$\left.\begin{array}{l} x = 1\frac{1}{2} \\ 2x + 8y = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 1\frac{1}{2} + 8y = 5 \\ 3 + 8y = 5 \\ 8y = 2 \\ y = \frac{1}{4} \end{array}$

Om y te elimineren is het niet nodig om met 2 en 8 te vermenigvuldigen.

Dus $(x, y) = (1\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

6 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} 3x + 5y = -7 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - y = 19 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} 4x + y = 13 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

7 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} 5x + 2y = 69 \\ x + 3y = -7 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 2x - 5y = -19 \\ 5x + 4y = 35 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}2y = 1 \\ 0{,}3x - 0{,}3y = 1{,}5 \end{cases}$

8 Los exact op.

a $\begin{cases} 5x - y = 3\sqrt{2} \\ 3x + 2y = 7\sqrt{2} \end{cases}$ **b** $\begin{cases} x\sqrt{2} + y = \sqrt{2} \\ x + y\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$ **c** $\begin{cases} 4x\sqrt{3} - 5y\sqrt{2} = 2\sqrt{6} \\ x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 12 \end{cases}$

A9 Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van de lijnen.

a k: $3x - 2y = -12$ en l: $x + 4y = 38$

b p: $2x + 5y = 26$ en q: $3x - 2y = 1$

A10 In deze opgave stellen a en b getallen voor.

Gegeven is de rij getallen: a, b, $a + b$, $a + 2b$, $2a + 3b$, $3a + 5b$, ...

a Druk het zevende en het achtste getal van deze rij uit in a en b.

b Gegeven is dat het zevende getal 34 is en het achtste 55.
Bereken a en b.

A11 Gegeven is het stelsel $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = r \end{cases}$

Elimineer y, dus druk x uit in a, b, c, p, q en r.

E12 *

Boven een badkuip zitten drie verschillende kranen A, B en C. Draait men de kranen A en B open, dan is de badkuip in precies 4 minuten vol. De kranen A en C vullen de badkuip in precies 5 minuten, terwijl de kranen B en C dat in precies 6 minuten doen.
In hoeveel minuten is het bad vol als alle drie de kranen tegelijk worden opengedraaid?

13

Gegeven is de parabool $y = x^2 + bx + c$ die door de punten (1, −2) en (2, 3) gaat.

a De parabool gaat door het punt (1, −2).
Licht toe dat hieruit volgt $b + c = -3$.

b De parabool gaat ook door het punt (2, 3).
Licht toe dat hieruit volgt $2b + c = -1$.

c Welke getallen b en c voldoen aan $\begin{cases} b + c = -3 \\ 2b + c = -1 \end{cases}$?

14

a De parabool $y = ax^2 + bx$ gaat door de punten (1, 5) en (2, 14).
Stel de formule op van de parabool.

b De parabool $y = ax^2 + c$ gaat door de punten (1, 8) en (2, 17).
Stel de formule op van de parabool.

15

De parabool $y = x^2 + px + q$ snijdt de lijn $y = 2px - q$ in het punt (2, −1).

a Bereken p en q.

b Bereken de coördinaten van het andere snijpunt van de parabool en de lijn.

A16

De parabool $y = ax^2 + bx + c$ gaat door de punten (−2, −10), (0, 4) en (3, 5).
Stel de formule op van de parabool.

A17 *

Gegeven zijn de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$, de lijn k: $y = x + 4$ en de lijn l: $y = -2x + 19$. De lijn k raakt de grafiek van f in het punt (2, 6) en de lijn l raakt de grafiek van f in het punt (8, 3).
Bereken a, b en c.

O18

Gegeven is het stelsel $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

a Licht toe dat je het stelsel niet kunt oplossen met behulp van elimineren door optellen of aftrekken.

b Laat zien dat de getallenparen $(x, y) = (1, 2)$ en $(x, y) = (2, 1)$ oplossing zijn van het stelsel.

Theorie C Elimineren door substitutie

Om het stelsel van opgave 18 op te lossen, maken we gebruik van elimineren door substitutie.
Uit $x + y = 3$ volgt $y = 3 - x$.
Substitutie van $y = 3 - x$ in $x^2 + y^2 = 5$ geeft $x^2 + (3 - x)^2 = 5$ en deze vergelijking is op te lossen.

Voorbeeld

Los het stelsel $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ algebraïsch op.

Uitwerking

Substitutie van $y = x^2 - 4$ in $x + 2y = 2$ geeft $x + 2(x^2 - 4) = 2$

$$x + 2x^2 - 8 = 2$$
$$2x^2 + x - 10 = 0$$
$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot -10 = 81$$
$$x = \frac{-1 + 9}{4} = 2 \vee x = \frac{-1 - 9}{4} = -2\tfrac{1}{2}$$

$x = 2$ invullen in $y = x^2 - 4$ geeft $y = 2^2 - 4 = 0$.

$x = -2\frac{1}{2}$ invullen in $y = x^2 - 4$ geeft $y = (-2\frac{1}{2})^2 - 4 = 2\frac{1}{4}$.

Dus $(x, y) = (2, 0) \vee (x, y) = (-2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4})$.

19 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} y = x^2 - 18 \\ x + y = 2 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} y = x^2 - 3 \\ x - y = -3 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$

A20 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} (x - 3)^2 + y^2 = 8 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} xy = 20 \\ x + y = 9 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} xy = 15 \\ 4x + y = 16 \end{cases}$

A21 Van een ruit met oppervlakte 120 is de som van de diagonalen gelijk aan 34.
Bereken de lengte van de zijde van de ruit.

E22 Van een trapezium $ABCD$ is gegeven $AB = AD = BC = 4$ en $CD = 2$.
Bereken exact de oppervlakte van de cirkel die door de punten A, B, C en D gaat.

Terugblik

Een stelsel oplossen met elimineren door optellen of aftrekken

Het stelsel $\begin{cases} 3x - 5x = 18 \\ x - 3y = 14 \end{cases}$ van twee lineaire vergelijkingen met twee variabelen kun je oplossen met elimineren door optellen of aftrekken.
Vermenigvuldig de onderste vergelijking met 3 en trek daarna de vergelijkingen van elkaar af. Dan wordt x geëlimineerd.

$$\begin{cases} 3x - 5x = 18 \\ x - 3y = 14 \end{cases} \left|\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array}\right| \text{ geeft } \begin{cases} 3x - 5y = 18 \\ 3x - 9y = 42 \end{cases}$$
$$\underline{}\, -$$
$$4y = -24$$
$$y = -6$$

$y = -6$ invullen in $x - 3y = 14$ geeft $x - 3 \cdot -6 = 14$, dus $x = -4$.
De oplossing is $(x, y) = (-4, -6)$.

Stelsels bij lijnen en parabolen

Bij het berekenen van de waarden van a en b waarvoor de lijn $y = ax + b$ de parabool $y = ax^2 + 2bx - 3$ snijdt in het punt (4, 5) krijg je met een stelsel te maken.
(4, 5) invullen in $y = ax + b$ geeft $4a + b = 5$.
(4, 5) invullen in $y = ax^2 + 2bx - 3$ geeft $a \cdot 4^2 + 8b - 3 = 5$, dus $16a + 8b = 8$, oftewel $2a + b = 1$.
Zo ontstaat het stelsel $\begin{cases} 4a + b = 5 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$ dat je oplost door elimineren door aftrekken.

$$\begin{cases} 4a + b = 5 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$$
$$\underline{}\, -$$
$$2a \quad = 4$$
$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ 2a + b = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 + b = 1 \\ b = -3 \end{array}$$

Dus de lijn is $y = 2x - 3$ en de parabool is $y = 2x^2 - 6x - 3$.

Een stelsel oplossen met elimineren door substitutie

Het stelsel $\begin{cases} xy = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$ los je op met elimineren door substitutie.
Uit $x + y = 6$ volgt $y = 6 - x$.
Substitutie van $y = 6 - x$ in $xy = 8$ geeft $x(6 - x) = 8$

$$6x - x^2 = 8$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$(x - 2)(x - 4) = 0$$
$$x = 2 \vee x = 4$$

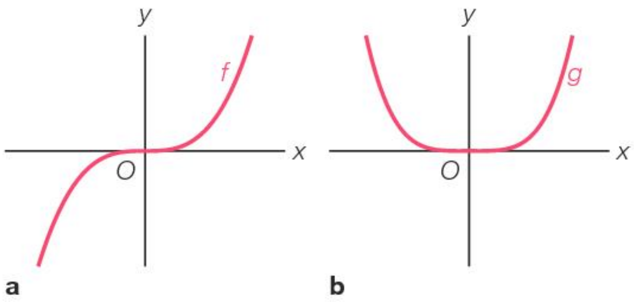
$x = 2$ geeft $y = 6 - 2 = 4$ en $x = 4$ geeft $y = 6 - 4 = 2$.
Dus $(x, y) = (2, 4) \vee (x, y) = (4, 2)$.
Merk op dat dit stelsel twee oplossingen heeft.

4.2 Hogeregraadsvergelijkingen

O23 In figuur 4.5a is de grafiek van $f(x) = x^3$ geschetst en in figuur 4.5b de grafiek van $g(x) = x^4$.

a Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^3 = 10$? En $x^3 = -10$?

b Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $x^4 = 10$? En $x^4 = -10$?



figuur 4.5

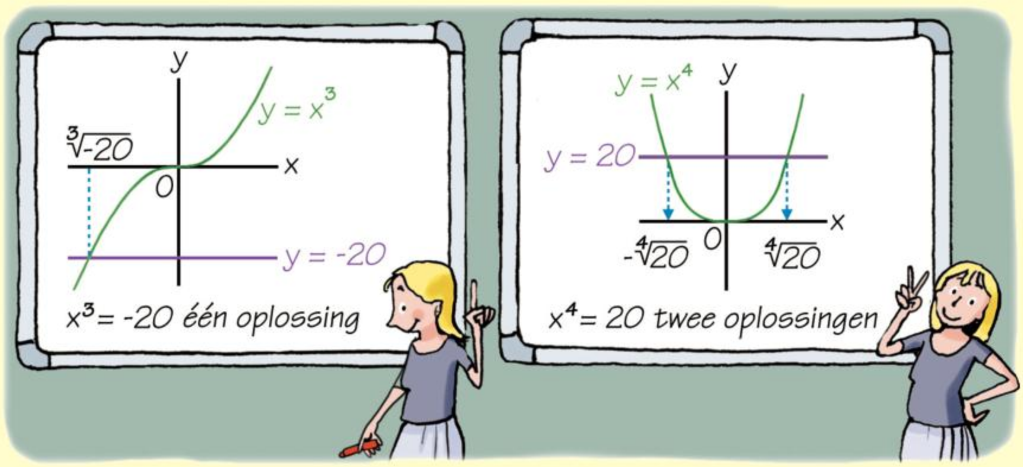
Theorie A Hogeremachtswortels

De vergelijking $x^2 = 5$ heeft de oplossingen $x = \sqrt{5}$ en $x = -\sqrt{5}$.
Je weet $(\sqrt{5})^2 = 5$, daarom heet $\sqrt{5}$ ook wel de **tweedemachtswortel** van 5.
Er zijn ook **hogeremachtswortels** zoals derdemachtswortels, vierdemachtswortels, enzovoort.
De vergelijking $x^3 = 20$ heeft als oplossing $x = \sqrt[3]{20}$.

Dus $(\sqrt[3]{20})^3 = 20$.

$\sqrt[3]{20}$ is de derdemachtswortel van 20.

De oplossing van $x^3 = -20$ is $x = \sqrt[3]{-20}$. Dus $(\sqrt[3]{-20})^3 = -20$.



Van de vergelijking $x^4 = 20$ is $x = \sqrt[4]{20}$ een oplossing.
Op het schoolbord hierboven zie je dat ook $x = -\sqrt[4]{20}$ een oplossing is.
De oplossingen van $x^4 = 20$ zijn dus $x = \sqrt[4]{20}$ en $x = -\sqrt[4]{20}$.
De vergelijking $x^4 = -20$ heeft geen oplossingen, want de lijn $y = -20$ snijdt de grafiek van $y = x^4$ niet.

$(-\sqrt[4]{20})^4 = 20$

De oplossingen van $x^n = p$ met $n = 2, 3, 4, ...$
n oneven — **$x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p}$**
n even en $p > 0$ — **$x^n = p$ geeft $x = \sqrt[n]{p} \vee x = -\sqrt[n]{p}$**
n even en $p < 0$ — **$x^n = p$ heeft geen oplossingen**

Voor $\sqrt[2]{p}$ schrijven we $\sqrt{p}$.

Bij het exact berekenen van de oplossingen van een vergelijking laat je wortels als $\sqrt[5]{30}$, $\sqrt[7]{-3}$ en $\sqrt[4]{100}$ staan.
Maar wortels die mooi uitkomen, herleid je.
Bijvoorbeeld

$\sqrt[3]{8} = 2$, want $2^3 = 8$

$\sqrt[4]{81} = 3$, want $3^4 = 81$

$\sqrt[7]{-1} = -1$, want $(-1)^7 = -1$

$\sqrt[5]{1} = 1$, want $1^5 = 1$.

Zo krijg je bij het algebraïsch oplossen van de vergelijking $8 - \frac{1}{2}x^3 = 40$ de uitwerking

$$\begin{aligned} 8 - \tfrac{1}{2}x^3 &= 40 \\ -\tfrac{1}{2}x^3 &= 32 \\ x^3 &= -64 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $5x^4 + 8 = 43$ **b** $2(x - 3)^4 + 7 = 17$

Uitwerking

a
$5x^4 + 8 = 43$
$5x^4 = 35$
$x^4 = 7$
$x = \sqrt[4]{7} \vee x = -\sqrt[4]{7}$

b
$2(x - 3)^4 + 7 = 17$
$2(x - 3)^4 = 10$
$(x - 3)^4 = 5$
$x - 3 = \sqrt[4]{5} \vee x - 3 = -\sqrt[4]{5}$
$x = 3 + \sqrt[4]{5} \vee x = 3 - \sqrt[4]{5}$

24
a Neem de tabel over en vul hem in.
b Controleer de tabel en leer hem uit het hoofd, zodat je de getallen voortaan herkent als macht.

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1					
2					
3					
4					
5					
6					

25 Bereken exact de oplossingen.

a $5x^3 = 135$
b $1 - 3x^5 = 97$
c $\frac{1}{4}x^8 + 3 = 10$
d $5x^3 - 1 = 9$
e $8x^3 + 2 = 1$
f $5x^6 + 7 = 97$

26 Bereken exact de oplossingen.

a $5x^4 - 3 = 17$
b $4x^3 - 5 = 1367$
c $3(4x - 5)^3 = 15$
d $13 - 2(1 - x)^4 = 1$

A27 Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{1}{4}x^3 + 60 = 6$
b $100 - 3x^4 = 55$
c $\frac{1}{2}(4x - 1)^5 + 3 = 19$
d $2\frac{1}{2}(1 - 2x)^6 - 6 = 14$

A28 Gegeven is de functie $f(x) = px^4 + 3x^2$.
Voor $p < 0$ zijn er drie punten op de grafiek van f waar de raaklijn horizontaal is: de oorsprong en de punten A en B.
Druk de x-coördinaten van A en B uit in p.

A29 Gegeven is de vergelijking $2x^4 + 2a = a^2 + 4$.

a Beschouw de gegeven vergelijking als een vergelijking in x en druk de oplossingen uit in a.
b Beschouw de gegeven vergelijking als een vergelijking in a en druk de oplossingen uit in x.

O30 Gegeven is de vergelijking $x^3 - x^2 - 6x = 0$.
Het linkerlid van de vergelijking is te ontbinden in $x(x + 2)(x - 3)$.

a Toon dit aan.
b Geef de oplossingen van de vergelijking $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

O31 Gegeven is de vergelijking $x^4 - x^2 - 6 = 0$.
Stel je $x^2 = u$, dan krijg je $u^2 - u - 6 = 0$.

a Licht dit toe.

De vergelijking $u^2 - u - 6 = 0$ heeft de oplossingen $u = -2$ en $u = 3$.

b Toon dit aan.
c Licht toe dat de vergelijking $x^4 - x^2 - 6 = 0$ de oplossingen $x = \sqrt{3}$ en $x = -\sqrt{3}$ heeft.

Theorie B Hogeregraadsvergelijkingen exact oplossen

Sommige hogeregraadsvergelijkingen kun je algebraïsch oplossen met ontbinden in factoren. Soms lukt dit door een factor buiten haakjes te brengen, soms lukt dit met een substitutie.

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

b $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Uitwerking

a $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x(x - 1)(x - 2) = 0$

$x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$

b $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Stel $x^2 = u$.

$u^2 - 3u + 2 = 0$

$(u - 1)(u - 2) = 0$

$u = 1 \vee u = 2$

$x^2 = 1 \vee x^2 = 2$

$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

Soms krijg je na substitutie een vergelijking die niet is op te lossen met ontbinden in factoren. Dan gebruik je de *abc*-formule.
Zo krijg je bij de vergelijking $2x^4 - 13x^2 + 20 = 0$ na substitutie van $x^2 = u$ de vergelijking $2u^2 - 13u + 20 = 0$.
De *abc*-formule geeft $u = 4 \vee u = 2\frac{1}{2}$.
Dus $x^2 = 4 \vee x^2 = 2\frac{1}{2}$
en dit geeft $x = 2 \vee x = -2 \vee x = \sqrt{2\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{2\frac{1}{2}}$.

Eventueel herleid je $\sqrt{2\frac{1}{2}}$ tot $\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

32 Los algebraïsch op.

a $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

b $x^3 - 5x^2 = 6x$

c $x^3 = 4x^2 + 12x$

d $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

A33 Bereken exact de oplossingen.

a $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

c $x^4 + 16 = 10x^2$

d $x^3 + 25x = 10x^2$

A34 Bereken exact de oplossingen.

a $4x^4 + 153 = 53x^2$

b $4x^4 + 21x^2 = 148$

c $4x^6 + 35 = 24x^3$

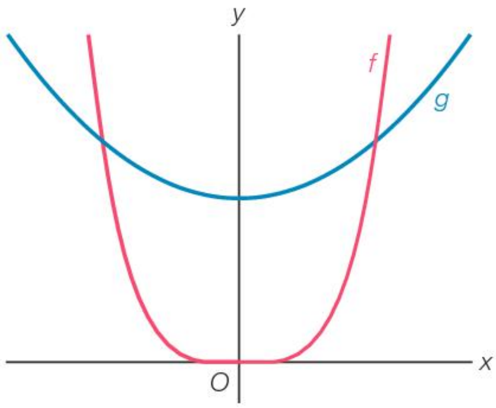
d $64x^5 + 27x = 224x^3$

E35 Van een rechthoek met oppervlakte 90 is de lengte van een diagonaal 15.
Bereken exact de lengtes van de zijden.

36 In de figuur hiernaast zijn de grafieken van de functies $f(x) = x^4$ en $g(x) = 2x^2 + 3$ geschetst.

a Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ exact op.

b Geef de exacte oplossing van de ongelijkheid $x^4 \leq 2x^2 + 3$.



figuur 4.6

37 Los exact op.

a $x^3 \geq 2x^2 + 8x$

b $\frac{2}{3}x^4 + 9 \leq 7x^2$

Bij het oplossen van een ongelijkheid maak je een schets van de grafieken.

O38 Gegeven is de vergelijking $|4x - 5| = 9$.

Licht toe dat zowel $x = -1$ als $x = 3\frac{1}{2}$ een oplossing is.

Theorie C Modulusvergelijkingen

De **modulusvergelijking** $|x| = 5$ heeft als oplossing $x = 5 \vee x = -5$.
De vergelijking $|3x - 1| = 8$ los je op door te gebruiken
$3x - 1 = 8 \vee 3x - 1 = -8$. Zie voorbeeld a.

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $|3x - 1| = 8$

b $|1 - x^2| = 8$

Uitwerking

a $|3x - 1| = 8$
$3x - 1 = 8 \vee 3x - 1 = -8$
$3x = 9 \vee 3x = -7$
$x = 3 \vee x = -2\frac{1}{3}$

b $|1 - x^2| = 8$
$1 - x^2 = 8 \vee 1 - x^2 = -8$
$-x^2 = 7 \vee -x^2 = -9$
$x^2 = -7 \vee x^2 = 9$
$x = 3 \vee x = -3$

39 Bereken exact de oplossingen.

a $|2x - 1| = 8$

b $|x^2 - 3| = 1$

c $|2x^2 - 5| = 11$

d $|5 - x^2| = 11$

A40 Los algebraïsch op.

a $|2x^4 - 5| = 15$

b $|2x^3 - 5| = 15$

c $|x^4 - 5x^2| \leq 6$

d $|x^6 - 10x^3| \geq 24$

5000 jaar vergelijkingen

Al rond 3000 voor Christus waren de Babyloniërs in staat om kwadratische vergelijkingen op te lossen. Dit blijkt uit kleitabletten uit die tijd waarop wiskundige teksten voorkomen. In die tijd werd een vergelijking en ook de oplossingsmethode omschreven in woorden: de *abc*-formule kende men nog niet in de vorm zoals jij die hebt geleerd.

Het systematisch oplossen van vergelijkingen kwam rond 800 pas echt op gang in de Arabische wiskunde. Van grote invloed is het werk van Mohammed ibn Musa Al Khwarizmi.

Rond 1100 ontdekte de Perzische wiskundige Omar Khayyam een methode om enkele derdegaadsvergelijkingen met behulp van meetkundige hulpmiddelen op te lossen, maar het zou nog tot de 16e eeuw duren alvorens de derdegraadsvergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kon worden opgelost.

Scipio del Ferro, professor aan de universiteit van Bologna, vertelde rond 1515 aan zijn leerling Antonio Maria Fior hoe je vergelijkingen van de vorm $x^3 + cx = d$ kunt oplossen.

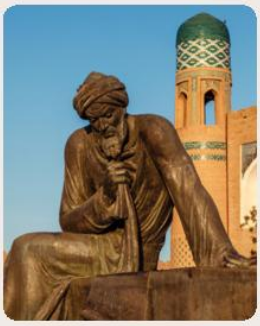
In 1535 ontdekte Niccolo Tartaglia een methode om derdegraadsvergelijkingen van de vorm $x^3 + bx^2 = d$ op te lossen, maar hij hield zijn ontdekking aanvankelijk nog geheim.

In 1545 beschreef Girolamo Cardano in zijn boek Ars Magna hoe je de vergelijking $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ kunt oplossen. Tartaglia beschuldigde Cardano van plagiaat, maar de formule waarmee de oplossingen van een derdegraadsvergelijking kunnen worden gevonden is genoemd naar Cardano. In Ars Magna beschrijft Cardano ook dat een van zijn studenten, Ludovico Ferrari, in 1540 ontdekte hoe je vierdegraadsvergelijkingen kunt oplossen.

Rond 1750 hield Leonhard Euler zich bezig met het vinden van een formule voor de oplossingen van een vijfdegraadsvergelijking, maar hij slaagde er niet in dit probleem op te lossen.

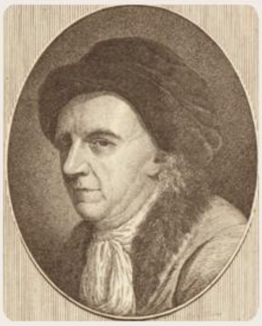
In 1824 bewees de Noorse wiskundige Niels Abel dat het onmogelijk is een formule voor de oplossingen van een vijfdegraadsvergelijking te vinden.

De Fransman Evariste Galois (1811-1832) heeft een algemene theorie ontwikkeld waarin voor elke *n*-de graadsvergelijking wordt aangegeven onder welke voorwaarden deze kan worden opgelost. In de nacht voor het duel waarin hij de dood vond, heeft hij deze theorie opgeschreven.



Musa Al Khwarizmi

Niccolo Tartaglia



Leonhard Euler

Niels Abel

Evariste Galois

Terugblik

De vergelijking $x^n = p$ met $n = 2, 3, 4, \ldots$

Onderscheid de gevallen n is oneven en n is even.
Bij oneven n heeft de vergelijking $x^n = p$ precies één oplossing.
$x^5 = 8$ geeft $x = \sqrt[5]{8}$ en $x^5 = -12$ geeft $x = \sqrt[5]{-12}$.
Bij even n heeft de vergelijking $x^n = p$

- twee oplossingen als $p > 0$, bijvoorbeeld $x^4 = 18$ geeft $x = \sqrt[4]{18} \vee x = -\sqrt[4]{18}$
- geen oplossingen als $p < 0$, bijvoorbeeld $x^4 = -18$ heeft geen oplossingen.

Vergelijkingen zoals $3x^5 + 7 = 19$

$3x^5 + 7 = 19$
$3x^5 = 12$
$x^5 = 4$
$x = \sqrt[5]{4}$

Vergelijkingen zoals $3(x-1)^4 + 7 = 19$

$3(x-1)^4 + 7 = 19$
$3(x-1)^4 = 12$
$(x-1)^4 = 4$
$x - 1 = \sqrt[4]{4} \vee x - 1 = -\sqrt[4]{4}$
$x = 1 + \sqrt[4]{4} \vee x = 1 - \sqrt[4]{4}$

Vergelijkingen zoals $x^3 - 7x^2 + 10x = 0$

$x^3 - 7x^2 + 10x = 0$
$x(x^2 - 7x + 10) = 0$
$x(x-2)(x-5) = 0$
$x = 0 \vee x = 2 \vee x = 5$

Vergelijkingen zoals $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$

$x^4 - 7x^2 + 10 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$u^2 - 7u + 10 = 0$
$(u-2)(u-5) = 0$
$u = 2 \vee u = 5$
$x^2 = 2 \vee x^2 = 5$
$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{5} \vee x = -\sqrt{5}$

Vergelijkingen zoals $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$

$2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$
Stel $x^2 = u$.
$2u^2 - 7u + 5 = 0$
$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9$
$u = \dfrac{7+3}{4} = 2\frac{1}{2} \vee u = \dfrac{7-3}{4} = 1$
$x^2 = 2\frac{1}{2} \vee x^2 = 1$
$x = \sqrt{2\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{2\frac{1}{2}} \vee x = 1 \vee x = -1$

Modulusvergelijkingen

Het oplossen van de modulusvergelijking $|1 - x^2| = 3$ gaat als volgt.
$|1 - x^2| = 3$
$1 - x^2 = 3 \vee 1 - x^2 = -3$
$-x^2 = 2 \vee -x^2 = -4$
$x^2 = -2 \vee x^2 = 4$
$x = 2 \vee x = -2$

Hogeregraadsongelijkheden algebraïsch oplossen

Bij het algebraïsch oplossen van de hogeregraadsongelijkheid $f(x) < g(x)$ ga je als volgt te werk.

1 Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ algebraïsch op.
2 Schets de grafieken van f en g.
3 Lees het antwoord van de ongelijkheid $f(x) < g(x)$ uit de schets af.

4.3 Regels voor het oplossen van vergelijkingen

041 Gegeven is de vergelijking $5x(x^2 - 4) = 15(x^2 - 4)$.

a Werk de haakjes weg en licht toe dat dit geen goede aanpak is om de vergelijking op te lossen.

b Volgens Maud is $x = 2$ een oplossing.
Ben je het daarmee eens?

c Klaas deelt het linker- en het rechterlid door $x^2 - 4$ en lost dus de vergelijking $5x = 15$ op.
Geef commentaar.

Theorie A Vergelijkingen van de vorm $AB = 0$, $A^2 = B^2$ en $AB = AC$

Bij het oplossen van de vergelijking $(x^2 - 1)(2x^2 - 1) = 0$ gebruik je de volgende regel.

$AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$

Dus $(x^2 - 1)(2x^2 - 1) = 0$ geeft
$x^2 - 1 = 0 \vee 2x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1 \vee x^2 = \frac{1}{2}$
$x = 1 \vee x = -1 \vee x = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$

Uit $x^2 = 25$ volgt $x = 5 \vee x = -5$.
De vergelijking $x^2 = 25$ heeft de vorm $A^2 = B^2$.
Bij het oplossen van een vergelijking van de vorm $A^2 = B^2$ gebruik je de volgende regel.

$A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$

$A^2 = B^2$
$A^2 - B^2 = 0$
$(A - B)(A + B) = 0$
$A - B = 0 \vee A + B = 0$
$A = B \vee A = -B$

Met deze regel los je de vergelijking $(2x^2 - 1)^2 = x^2$ als volgt op.
$(2x^2 - 1)^2 = x^2$
$2x^2 - 1 = x \vee 2x^2 - 1 = -x$
$2x^2 - x - 1 = 0 \vee 2x^2 + x - 1 = 0$
$D = 1 + 8 = 9 \qquad D = 1 + 8 = 9$

$$x = \frac{1 + 3}{4} = 1 \vee x = \frac{1 - 3}{4} = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2} \vee x = \frac{-1 - 3}{4} = -1$$

Bij het oplossen van de vergelijking $x^2(2x^2 - 1) = 4(2x^2 - 1)$ mag je niet beginnen met beide leden te delen door $2x^2 - 1$, want $2x^2 - 1$ zou gelijk aan nul kunnen zijn.
Je hebt te maken met een vergelijking van de vorm $AB = AC$ en bij het oplossen gebruik je de volgende regel.

$AB = AC$ geeft $A = 0 \vee B = C$

$AB = AC$
$AB - AC = 0$
$A(B - C) = 0$
$A = 0 \vee B - C = 0$
$A = 0 \vee B = C$

Het oplossen van de vergelijking
$x^2(2x^2 - 1) = 4(2x^2 - 1)$ gaat dus als volgt.
$x^2(2x^2 - 1) = 4(2x^2 - 1)$
$2x^2 - 1 = 0 \vee x^2 = 4$
$2x^2 = 1 \vee x = 2 \vee x = -2$
$x^2 = \frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x = -2$
$x = \sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x = 2 \vee x = -2$

Kies je $C = 1$ in de regel $AB = AC$ geeft $A = 0 \vee B = C$, dan krijg je de volgende regel.

$AB = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$

$AB = A$
$AB - A = 0$
$A(B - 1) = 0$
$A = 0 \vee B - 1 = 0$
$A = 0 \vee B = 1$

Bij het oplossen van de vergelijking $x^2(x - 1) = x^2$
krijg je $x^2(x - 1) = x^2$
$x^2 = 0 \vee x - 1 = 1$
$x = 0 \vee x = 2$

Ga bij het oplossen van vergelijkingen eerst na of je een van de volgende regels kunt gebruiken.

$AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$
$A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$
$AB = AC$ geeft $A = 0 \vee B = C$
$AB = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$

Voorbeeld

Los exact op $(2x - 1)^3 = 2x - 1$.

Uitwerking
$(2x - 1)^3 = 2x - 1$
$(2x - 1)(2x - 1)^2 = 2x - 1$ $\quad$ $AB = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$
$2x - 1 = 0 \vee (2x - 1)^2 = 1$
$2x = 1 \vee 2x - 1 = 1 \vee 2x - 1 = -1$
$x = \frac{1}{2} \vee 2x = 2 \vee 2x = 0$
$x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = 0$

42 Los exact op.

a $(4x-1)^2=(3x-2)^2$
b $(3x^2-5)^2=4x^2$
c $(x^2-4x)(x^2-8)=0$
d $x^3(x-3)=8(x-3)$
e $(3x-2)^4=3x-2$
f $2x(x^2-4)=6(x-2)$

A43 Gegeven is de functie $f(x)=(3x+4)(x-2)^3$.

a Schets de grafiek van f en geef het bereik van f. Rond af op één decimaal.
b Bereken algebraïsch de nulpunten van f.
c De lijn k: $y=3x+4$ snijdt de grafiek van f in de punten A en B. Bereken algebraïsch de coördinaten van A en B.
d Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafiek van f met de parabool $y=(3x+4)(x-2)$.

A44 Een van de oplossingen van de vergelijking $(4x+p)^3=4x+p$ is $x=1$. Bereken algebraïsch de andere oplossingen.

O45
a Gegeven is de vergelijking $\sqrt{2x-5}=3$. Licht toe dat hieruit volgt $2x-5=9$ en los deze vergelijking op.
b Gegeven is de vergelijking $\sqrt{2x-5}=-3$. Licht toe dat deze vergelijking geen oplossing heeft.

Theorie B Wortelvergelijkingen

De vergelijking $\sqrt{2x-3}=5$ is een voorbeeld van een **wortelvergelijking**.
Bij het algebraïsch oplossen van de vergelijking $\sqrt{2x-3}=5$ ga je als volgt te werk.

- Kwadrateer het linker- en rechterlid. $\sqrt{2x-3}=5$ geeft $2x-3=25$
- Los de verkregen vergelijking op. $2x-3=25$

$$2x=28$$
$$x=14$$

Bij de vergelijking $x+\sqrt{x}=12$ breng je vóór het kwadrateren eerst x van het linkerlid naar het rechterlid. Je krijgt $\sqrt{x}=12-x$.
Je hebt $\sqrt{x}$ **geïsoleerd**.
Kwadrateren geeft $x=(12-x)^2$

$$x=144-24x+x^2$$
$$x^2-25x+144=0$$
$$(x-9)(x-16)=0$$
$$x=9 \vee x=16$$

De getallen 9 en 16 zijn echter niet beide oplossing van de oorspronkelijke vergelijking $x+\sqrt{x}=12$.
Invullen van $x=9$ in de vergelijking $x+\sqrt{x}=12$ geeft $9+\sqrt{9}=12$ en dit klopt.
Invullen van $x=16$ in de vergelijking $x+\sqrt{x}=12$ geeft $16+\sqrt{16}=12$ en dit klopt niet.
Daarom is $x=9$ de enige oplossing die **voldoet**.
Door het kwadrateren is **een oplossing ingevoerd**.

> Vervang je in een vergelijking de variabele door een getal en klopt het, dan zeggen we dat het getal voldoet aan de vergelijking. Het getal is dus een oplossing van de vergelijking.
> Vul je een getal in en klopt het niet, dan zeggen we dat het getal niet aan de vergelijking voldoet.

Het algebraïsch oplossen van wortelvergelijkingen gaat in drie stappen: isoleren, kwadrateren en controleren.

Werkschema: wortelvergelijkingen algebraïsch oplossen

1. **Isoleer** de wortelvorm, dus zet de wortelvorm apart.
2. **Kwadrateer** het linker- en rechterlid en los de verkregen vergelijking op.
3. **Controleer** of de oplossingen van de gekwadrateerde vergelijking voldoen aan de oorspronkelijke vergelijking.

Voorbeeld

Los algebraïsch op.

a $3x = \sqrt{8x+1}$

b $2x - \sqrt{x} = 10$

Uitwerking

a $3x = \sqrt{8x+1}$
kwadrateren geeft
$9x^2 = 8x + 1$
$9x^2 - 8x - 1 = 0$
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 9 \cdot -1 = 100$
$x = \dfrac{8+10}{18} = 1 \vee x = \dfrac{8-10}{18} = -\frac{1}{9}$
$x = 1$ geeft $3 = \sqrt{9}$ vold.
$x = -\frac{1}{9}$ geeft $-\frac{1}{3} = \sqrt{\frac{1}{9}}$ vold. niet

b $2x - \sqrt{x} = 10$ isoleren
$2x - 10 = \sqrt{x}$
kwadrateren geeft
$(2x-10)^2 = x$
$4x^2 - 40x + 100 = x$
$4x^2 - 41x + 100 = 0$
$D = (-41)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 100 = 81$
$x = \dfrac{41+9}{8} = 6\frac{1}{4} \vee x = \dfrac{41-9}{8} = 4$
$x = 6\frac{1}{4}$ geeft $12\frac{1}{2} - \sqrt{6\frac{1}{4}} = 10$ vold.
$x = 4$ geeft $8 - \sqrt{4} = 10$ vold. niet

46 Los algebraïsch op.

a $x = \sqrt{5x+14}$

b $3x = \sqrt{8x+20}$

c $5\sqrt{x} = x$

d $3x = \sqrt{18x+72}$

47 Los algebraïsch op.

a $4 - 3\sqrt{x} = 2$

b $5\sqrt{x} - 2x = 0$

c $2x - 5\sqrt{x} = 3$

d $5 - 2\sqrt{x} = 3$

Omdat het invoeren van oplossingen alleen bij de stap van het kwadrateren kan plaatsvinden, kun je controleren bij de vergelijking die vlak boven het kwadrateren staat.

A48 Los algebraïsch op.

a $2x + \sqrt{x} = 10$

b $\sqrt{x+12} = x$

c $2x + \sqrt{x} = 6$

d $10 - x\sqrt{x} = 2$

A49 De vergelijking $x - \sqrt{x} = 12$ is algebraïsch op te lossen met isoleren, kwadrateren en controleren.
Maar de vergelijking is ook op te lossen met de substitutie $\sqrt{x} = u$.

a Gebruik de substitutie $\sqrt{x} = u$ om de vergelijking $x - \sqrt{x} = 12$ algebraïsch op te lossen.

b Gebruik de substitutie $x\sqrt{x} = u$ om de vergelijking $x^3 - 9x\sqrt{x} + 8 = 0$ algebraïsch op te lossen.

c Los exact op $x^5 + 10 = 7x^2\sqrt{x}$.

050 Bij de vergelijking $\frac{x}{2}=\frac{x+4}{x}$ hoort de verhoudingstabel

x	$x+4$
2	x

a Licht toe dat uit deze verhoudingstabel volgt $x^2-2x-8=0$.
b Bereken x.

Theorie C Gebroken vergelijkingen

De vergelijking $\frac{x+2}{x+1}=\frac{6}{x+3}$ is een **gebroken vergelijking** omdat de variabele in de noemer van een breuk voorkomt. Je kunt deze vergelijking algebraïsch oplossen met **kruislings vermenigvuldigen**. Hierdoor kunnen oplossingen worden ingevoerd. Controleer daarom of de gevonden waarden van x voldoen. Het is daarvoor voldoende om na te gaan of er voor de gevonden waarden van x geen noemer nul wordt.

Je krijgt
$\frac{x+2}{x+1}=\frac{6}{x+3}$
kruislings vermenigvuldigen geeft
$(x+2)(x+3)=6(x+1)$
$x^2+5x+6=6x+6$
$x^2-x=0$
$x(x-1)=0$
$x=0 \vee x=1$
vold. vold.

Ook de vergelijking $\frac{x+3}{x+1}=0$ is een gebroken vergelijking.
Omdat een breuk nul is als de teller nul is, krijg je $x+3=0$, dus de oplossing van deze vergelijking is $x=-3$.

Bij de vergelijking $\frac{2x-4}{x+1}=\frac{x+3}{x+1}$ zijn de noemers gelijk. Daarom krijg je een oplossing als ook de tellers aan elkaar gelijk zijn. Dus $2x-4=x+3$ en dit geeft $x=7$.

Bij de vergelijking $\frac{x+3}{2x-4}=\frac{x+3}{x+1}$ zijn de tellers gelijk. Als deze tellers gelijk zijn aan 0 staat er $\frac{0}{2x-4}=\frac{0}{x+1}$ en dit levert een oplossing.
Deze oplossing is $x=-3$.
Maar ook als de noemers gelijk zijn heb je een oplossing. Dit geeft $2x-4=x+1$, dus $x=5$.

$\frac{0}{1}=0$
$\frac{1}{0}$ kan niet
$\frac{0}{0}$ kan niet
$\frac{0}{10}=0$
Een breuk is nul als de teller nul is en de noemer niet.

Regels voor het algebraïsch oplossen van gebroken vergelijkingen

$\frac{A}{B} = 0$ geeft $A = 0 \wedge B \neq 0$

$\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC \wedge B \neq 0$

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $AD = BC \wedge B \neq 0 \wedge D \neq 0$

$\frac{A}{B} = \frac{C}{B}$ geeft $A = C \wedge B \neq 0$

$\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ geeft $(A = 0 \vee B = C) \wedge B \neq 0 \wedge C \neq 0$

Voorbeeld

Bereken exact de oplossingen.

a $\frac{6x^2 - 12}{x^2 - 12} = 0$

b $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} = \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$

Uitwerking

a $\frac{6x^2 - 12}{x^2 - 12} = 0$

$6x^2 - 12 = 0$

$6x^2 = 12$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

vold. vold.

b $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 4} = \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$

$x^2 - 1 = 0 \vee x^2 + 4 = 2x + 4$

$x^2 = 1 \vee x^2 - 2x = 0$

$x = 1 \vee x = -1 \vee x(x - 2) = 0$

$x = 1 \vee x = -1 \vee x = 0 \vee x = 2$

vold. vold. vold. vold.

INFORMATIEF

Oplossingen invoeren bij kruislings vermenigvuldigen

Kruislings vermenigvuldigen bij $\frac{2}{x^2 + x} = \frac{7}{x^2 + 2x}$ geeft

$2(x^2 + 2x) = 7(x^2 + x)$

$2x^2 + 4x = 7x^2 + 7x$

$-5x^2 - 3x = 0$

$-x(5x + 3) = 0$

$x = 0 \vee x = -\frac{3}{5}$

Invullen van $x = 0$ in de oorspronkelijke vergelijking geeft $\frac{2}{0} = \frac{7}{0}$ en dit klopt niet.

Door het kruislings vermenigvuldigen is een oplossing ingevoerd.

51 Los algebraïsch op.

a $\dfrac{x-3}{x+1} = 1\frac{1}{2}$

b $\dfrac{x-1}{x} + 1 = 3$

c $\dfrac{3x+4}{x-1} = \dfrac{x+18}{x}$

d $\dfrac{2x-5}{4-x} = \dfrac{x+2}{3x-4}$

52 Bereken exact de oplossingen.

a $\dfrac{5x^2-15}{x^2+5} = 0$

b $\dfrac{x^2-3}{x^2+1} = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

c $\dfrac{x^2-4}{2x+5} = \dfrac{x^2-4}{x+4}$

d $\dfrac{x^2+1}{x+1} = \dfrac{x+3}{x+1}$

A53 Bereken exact de oplossingen.

a $\dfrac{3x^2-10}{x^2+1} = 2$

b $\dfrac{x^3-8}{x^2+2} = \dfrac{x^3-8}{x+8}$

c $\dfrac{3x^2-10}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{25}$

d $\dfrac{6x^2-12}{(x^2-1)^2} = 1\frac{1}{3}$

A54 Bereken exact de x-coördinaten van de punten op de grafiek van $f(x) = \dfrac{-10x}{x^2+2}$ waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan $\frac{5}{9}$.

E55 Wouter gaat lopend van zijn huis naar zijn sportclub. Hij had ook zijn racefiets kunnen pakken; daarmee gaat de tocht zeven keer zo snel. Maar die liet hij thuis staan. Na 1 km is hij op een punt aangekomen dat het in tijd niets uitmaakt of hij verder doorloopt of juist naar huis terugloopt om alsnog op de racefiets te gaan. Hoeveel km is hij op dat moment verwijderd van zijn sportclub?

Terugblik

Vergelijkingen van de vorm $AB = 0$, $A^2 = B^2$, $AB = AC$ en $AB = A$

regel	**voorbeeld**	**eerste stap**
$AB = 0$ geeft $A = 0 \vee B = 0$	$(x^2 - x)(x^2 - 1) = 0$	$x^2 - x = 0 \vee x^2 - 1 = 0$
$A^2 = B^2$ geeft $A = B \vee A = -B$	$(x^2 - x)^2 = (x^2 - 1)^2$	$x^2 - x = x^2 - 1 \vee x^2 - x = -x^2 + 1$
$AB = AC$ geeft $A = 0 \vee B = C$	$x^2(x^2 - x) = 9(x^2 - x)$	$x^2 - x = 0 \vee x^2 = 9$
$AB = A$ geeft $A = 0 \vee B = 1$	$x^2(x^2 - x) = x^2 - x$	$x^2 - x = 0 \vee x^2 = 1$

Wortelvergelijkingen

De drie stappen voor het algebraïsch oplossen van wortelvergelijkingen zijn isoleren, kwadrateren en controleren.
De vergelijking $x = \sqrt{2x + 3}$ los je als volgt op.
$x = \sqrt{2x + 3}$ kwadrateren geeft
$x^2 = 2x + 3$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x + 1)(x - 3) = 0$
$x = -1 \vee x = 3$
$x = -1$ geeft $-1 = \sqrt{1}$ voldoet niet en $x = 3$ geeft $3 = \sqrt{9}$ voldoet.

Gebroken vergelijkingen

regel	**voorbeeld**	**eerste stap**	**voorwaarde**
$\frac{A}{B} = 0$ geeft $A = 0 \wedge B \neq 0$	$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = 0$	$x^2 - 2x = 0$	$x^2 \neq 4$
$\frac{A}{B} = C$ geeft $A = BC \wedge B \neq 0$	$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = 2$	$x^2 - 2x = 2x^2 - 8$	$x^2 \neq 4$
$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ geeft $AD = BC \wedge B \neq 0 \wedge D \neq 0$	$\frac{2x}{x - 2} = \frac{x}{x - 4}$	$2x(x - 4) = x(x - 2)$	$x \neq 2 \wedge x \neq 4$
$\frac{A}{B} = \frac{C}{B}$ geeft $A = C \wedge B \neq 0$	$\frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$	$2x = x + 1$	$x^2 \neq 4$
$\frac{A}{B} = \frac{A}{C}$ geeft $(A = 0 \vee B = C) \wedge B \neq 0 \wedge C \neq 0$	$\frac{x^2 - 4}{2x} = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$	$x^2 - 4 = 0 \vee 2x = x + 1$	$x \neq 0 \wedge x \neq -1$

4.4 Herleidingen en inverse functies

O56 Gegeven is de breuk $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$.

Deze breuk is te herleiden tot $\frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 1)^2}$.

Licht dit toe en licht toe dat $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$ te herleiden is tot $\frac{x + 2}{x + 1}$.

Theorie A Herleiden en merkwaardige producten

De breuk $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$ is te herleiden door de teller en de noemer te ontbinden in factoren en vervolgens de teller en de noemer te delen door dezelfde factor.

Je krijgt $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)^2} = \frac{x - 2}{x + 2}$.

Bij het ontbinden van de teller is het merkwaardige product $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ gebruikt in de vorm $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.
En in de noemer is gebruikt $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$.

$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$
$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$
$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

En zo is ook $\frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ te herleiden.

Je krijgt $\frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = x^2 - 1$.

Ook $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ is op deze manier te herleiden.

Je krijgt $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1$. Maar let op.

In $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ moet gelden $x^2 - 1 \neq 0$ oftewel $x^2 \neq 1$, dus $x \neq 1 \wedge x \neq -1$.

Daarom moet dit ook gelden bij de herleiding tot $x^2 + 1$.

We schrijven $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1$ mits $x \neq 1 \wedge x \neq -1$.

Bij het herleiden van breuken moet je dus nagaan of er voorwaarden gelden.

Voorbeeld

Herleid $\frac{x^5 - 9x}{x^2 - 3}$.

Uitwerking

$$\frac{x^5 - 9x}{x^2 - 3} = \frac{x(x^4 - 9)}{x^2 - 3} = \frac{x(x^2 + 3)(x^2 - 3)}{x^2 - 3} = x(x^2 + 3) \text{ mits } x \neq \sqrt{3} \wedge x \neq -\sqrt{3}$$

57 Herleid.

a $\dfrac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 2x}$

b $\dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 16}$

c $\dfrac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 1}$

58 Herleid.

a $\dfrac{2x^5 - 32x}{x^2 - 4}$

b $\dfrac{x^4 + 4x^2 + 4}{x^4 - 4}$

c $\dfrac{x^4 - 9x^2}{x^2 - 3x}$

A59

a De lijn k snijdt de parabool $y = x^2$ in de punten P en Q met $x_P = p$, $x_Q = q$ en $p < q$.
Stel de formule op van k.

b Op de grafiek van $f(x) = x^4$ liggen de punten A en B met $x_A = a$, $x_B = b$ en $a < b$.
De formule van de lijn l door A en B is
$y = (a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)x - ab(a^2 + ab + b^2)$.
Bewijs dit.

O60

a Herleid $2x - \dfrac{1}{x}$ tot één breuk.

b Licht toe dat $(x + 1) \cdot \dfrac{x + 2}{x + 3}$ te herleiden is tot $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 3}$.

c Licht toe dat $\dfrac{x}{\left(\dfrac{2}{x}\right)}$ te herleiden is tot $\frac{1}{2}x^2$. Voor welke waarde van x is deze herleiding niet juist?

d Gegeven is de formule $y = \dfrac{2x + \frac{1}{3}}{x + 1}$.
Licht toe dat de formule te schrijven is als $y = \dfrac{6x + 1}{3x + 3}$.

Theorie B Herleidingen en breuken

Bij het herleiden van breuken gebruik je de volgende regels.

Optellen	Vermenigvuldigen	Delen
$\frac{A}{B}+C=\frac{A+BC}{B}$	$A\cdot\frac{B}{C}=\frac{AB}{C}$	$\frac{A}{\left(\frac{B}{C}\right)}=A\cdot\frac{C}{B}=\frac{AC}{B}$ mits $C\neq 0$
$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}$	$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$	$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{C}=\frac{A}{BC}$

In de formule $y=\frac{3-\frac{2}{x}}{x+4}$ staat de breuk $\frac{2}{x}$ in de teller.
Om deze breuk weg te werken, vermenigvuldig je de teller en de noemer van $\frac{3-\frac{2}{x}}{x+4}$ met x. Dus $y=\frac{3-\frac{2}{x}}{x+4}=\frac{\left(3-\frac{2}{x}\right)\cdot x}{(x+4)\cdot x}=\frac{3x-2}{x(x+4)}$.

Voorbeeld

Herleid.

a $y=x-\frac{2x-1}{x-1}$ **b** $y=\frac{4x}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$ **c** $N=\frac{500}{4b+\frac{10}{3b}}$

Uitwerking

a $y=x-\frac{2x-1}{x-1}=\frac{x(x-1)}{x-1}-\frac{2x-1}{x-1}=\frac{x^2-x-2x+1}{x-1}=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$

b $y=\frac{4x}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}=4x\cdot\frac{x-1}{x+1}=\frac{4x(x-1)}{x+1}=\frac{4x^2-4x}{x+1}$ mits $x\neq 1$

c $N=\frac{500}{4b+\frac{10}{3b}}=\frac{500\cdot 3b}{\left(4b+\frac{10}{3b}\right)\cdot 3b}=\frac{1500b}{12b^2+10}=\frac{750b}{6b^2+5}$ mits $b\neq 0$

Bij de formule $y=\frac{x^2+5x-6}{x}$ kun je x **uitdelen**.

Je krijgt $y=\frac{x^2+5x-6}{x}=\frac{x^2}{x}+\frac{5x}{x}-\frac{6}{x}=x+5-\frac{6}{x}$.

Je mag in één keer schrijven $y=\frac{x^2+5x-6}{x}=x+5-\frac{6}{x}$.

61 Herleid tot één breuk.

a $y = \dfrac{20}{x} - \dfrac{5}{2x}$

b $y = \dfrac{10}{x-1} - x^2$

c $y = \dfrac{2x^2}{\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}$

d $y = \dfrac{x}{x-1}\left(x + \dfrac{1}{x-1}\right)$

e $y = \dfrac{5}{x-2} \cdot \dfrac{6}{x+2}$

f $y = \dfrac{\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)}{x-1}$

62 Herleid.

a $y = \dfrac{x + \dfrac{3}{x+1}}{x}$

b $y = \dfrac{10 + \dfrac{5}{x-1}}{6 - \dfrac{3}{x-1}}$

c $Q = \dfrac{10}{p + \dfrac{5}{2p}}$

63 Deel uit.

a $y = \dfrac{5x^2 + 1000}{x}$

b $K = \dfrac{6t^2 + 12t + 1500}{3t}$

c $F = \dfrac{5a^2 + 8a}{2a^2}$

d $N = \dfrac{6p^2 - 3p - 1}{2p}$

A64 Gegeven zijn de functies $f(x) = \dfrac{4x}{x+1}$ en $g(x) = \dfrac{4}{x-1}$.

Bereken exact de oplossingen.

a $f(x) = g(x)$

b $f(x) \cdot g(x) = 6$

c $f(x) - g(x) = 7$

d $f'(x) + 2 \cdot g'(x) = 0$

A65 Gegeven zijn de formules $N = \dfrac{4p-1}{2p+3}$ en $p = \dfrac{3x}{x+5}$.

a Substitueer $p = \dfrac{3x}{x+5}$ in $N = \dfrac{4p-1}{2p+3}$ en herleid tot de vorm $N = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

b Bereken algebraïsch voor welke x geldt dat $N = 9$.

A66 Rob is met vakantie in de Provence. Op een dag beklimt hij op zijn racefiets vanaf de camping de Mont Ventoux. Nadat Rob op de top is aangekomen, rust hij even uit, reset zijn fietscomputer en rijdt zo snel mogelijk weer naar beneden. De beklimming doet Rob met een gemiddelde snelheid van 12 km/uur en bij de afdaling was zijn gemiddelde snelheid 48 km/uur. Rob vraagt zich af wat de gemiddelde snelheid $\overline{v}$ gedurende de heen- en terugreis samen is.
Stel de afstand van de camping tot de top is d km. De tijd t in uren voor de heen- en terugreis samen is dan $t = \frac{d}{12} + \frac{d}{48}$.

a Licht dit toe.

b De gemiddelde snelheid is $\overline{v} = \dfrac{2}{\frac{1}{12} + \frac{1}{48}}$.
Licht dit toe en bereken de gemiddelde snelheid van Rob in km/uur.

Bij de gemiddelde snelheid heb je te maken met het **harmonisch gemiddelde**.
Het harmonisch gemiddelde h van de getallen a en b is $h = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

c Herleid de formule van h zo, dat de breuken in de noemer verdwijnen.

Het harmonisch gemiddelde van de getallen a, b en c is $h = \dfrac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

d Het harmonisch gemiddelde van a, $2a$ en $3a$ is pa.
Bereken exact de waarde van p.

INFORMATIEF

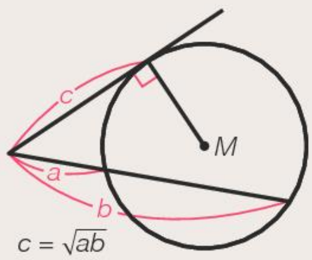
Gemiddelden

Het *harmonisch gemiddelde* h van de getallen a en b is het omgekeerde van het *rekenkundig gemiddelde* van $\frac{1}{a}$ en $\frac{1}{b}$, dus $h = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

Het harmonisch gemiddelde komt voor in berekeningen bij het vervangen van parallel geschakelde weerstanden in een stroomkring door één weerstand.

Het *kwadratisch gemiddelde* van een serie getallen is de wortel uit het rekenkundig gemiddelde van de kwadraten van de getallen.
In de statistiek komt het kwadratisch gemiddelde tevoorschijn bij de standaardafwijking en in de elektrotechniek bij het effectieve vermogen.

Het *meetkundig gemiddelde* van n getallen is de n-de machtswortel van het product van de getallen.
In de meetkunde heb je met het meetkundig gemiddelde van twee getallen te maken bij de lengte van een raaklijnstuk aan een cirkel.



O67

Gegeven is de formule $y = \frac{2}{x}$.

Toon aan dat de formule $x = \frac{2}{y}$ op hetzelfde neerkomt.

Theorie C Variabelen vrijmaken bij gebroken formules

Bij de formule $y = \frac{2}{x-3}$ kun je de **variabele x vrijmaken** zodat x is uitgedrukt in y, oftewel x als functie van y is geschreven.
Dit gaat als volgt.

$y = \frac{2}{x-3}$ Vermenigvuldig beide leden met $x - 3$.
$y(x-3) = 2$
$xy - 3y = 2$ Alleen termen met x in het linkerlid.
$xy = 3y + 2$ Deel door y.
$x = \frac{3y+2}{y}$

Voorbeeld

Maak x vrij bij de formule $y = \frac{x}{x-3}$.

Uitwerking

$y = \frac{x}{x-3}$
$y(x-3) = x$
$xy - 3y = x$
$xy - x = 3y$
$x(y-1) = 3y$
$x = \frac{3y}{y-1}$

In opgave 68 ontdek je waarom op de tweede regel van de uitwerking van het voorbeeld niet 'mits $x \neq 3$' hoeft te worden toegevoegd.
Bij de rest van de opgaven in deze paragraaf kan het vermelden van de voorwaarde(n) achterwege blijven.

R68

In het voorbeeld wordt x vrijgemaakt bij de formule $y = \frac{x}{x-3}$.
Bij de formule $y = \frac{x}{x-3}$ mag je niet $x = 3$ nemen.
Na het vrijmaken krijg je $x = \frac{3y}{y-1}$.
Onderzoek of in deze formule $x = 3$ mogelijk is.

69 a Gegeven is de formule $y = \frac{x}{x+2}$.
Druk x uit in y.

b Gegeven is de formule $y = \frac{x-5}{x}$.
Schrijf x als functie van y.

c Maak x vrij bij de formule $y = \frac{x-2}{x-1}$.

d Druk x uit in y bij de formule $y = 320 - \frac{18}{x-1}$.

70 a Maak x vrij bij de formule $y = \frac{3x+2}{x-4}$.

b Druk x uit in y bij de formule $y = 20 - \frac{15}{x+1}$.

c Schrijf x als functie van y bij de formule $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{2x} + 4$.

71 a Gegeven is de formule $y = \frac{ax+4}{x+1}$.
Bereken a als na het vrijmaken van x geldt $x = \frac{1}{y-3} - 1$.

b Gegeven is de formule $y = 2 - \frac{3x+b}{x-1}$.
Bereken b als na het vrijmaken van x geldt $x = \frac{y-3}{y+1}$.

O72 Gegeven zijn de functie $f(x) = 2x - 4$ en de lijn $y = x$.

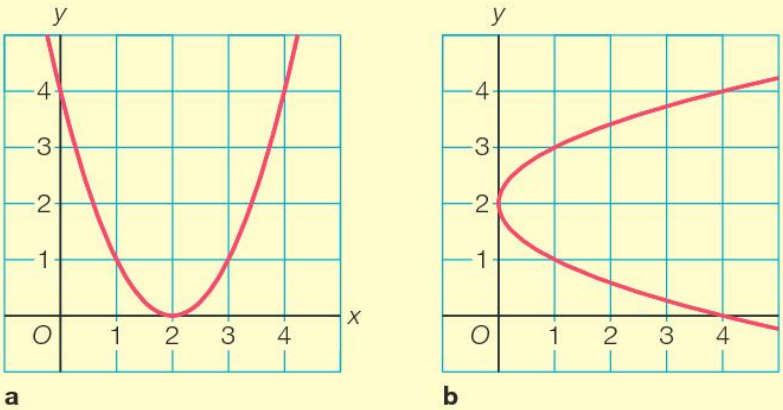
a Teken de grafiek van f en de lijn $y = x$ in één figuur.

b Teken in de figuur van a het spiegelbeeld van de grafiek van f bij spiegelen in de lijn $y = x$.

c Stel de formule op van het in b getekende spiegelbeeld van de grafiek van f.

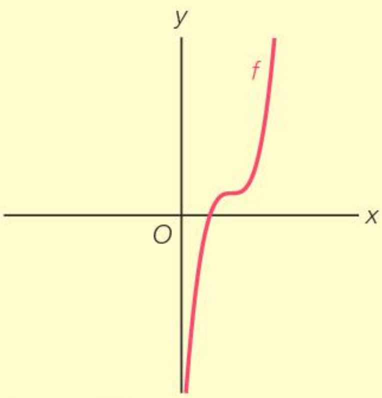
Theorie D Functie en inverse functie

In figuur 4.7a is de parabool $y = (x - 2)^2$ getekend. Deze parabool is de grafiek van een functie. Je hebt met een **functie van x naar y** te maken als bij elke waarde van x hoogstens één waarde van y hoort. Als je de grafiek van $y = (x - 2)^2$ spiegelt in de lijn $y = x$ krijg je de grafiek in figuur 4.7b. Dit is niet de grafiek van een functie, want er horen bij positieve waarden van x telkens twee waarden van y.



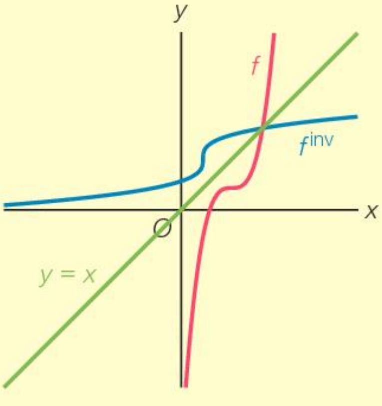
figuur 4.7 Bij de grafiek in figuur a hoort de formule $y = (x - 2)^2$ en bij de grafiek in figuur b hoort de formule $x = (y - 2)^2$. De grafiek in figuur a is de grafiek van een functie van x naar y. De grafiek in figuur b is niet de grafiek van een functie van x naar y.

In figuur 4.8 zie je de grafiek van de functie $f(x) = (x - 2)^3 + 1$.
Omdat bij deze functie bij elke waarde van y één waarde van x hoort, krijg je bij spiegeling van de grafiek in de lijn $y = x$ weer de grafiek van een functie.



figuur 4.8

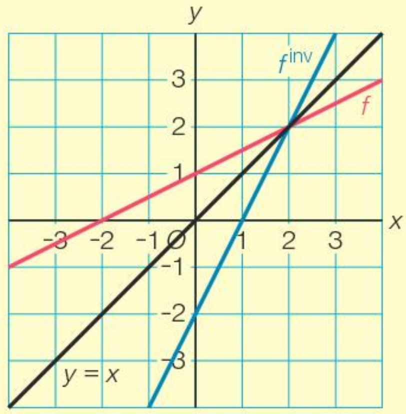
In figuur 4.9 zie je deze grafiek samen met de grafiek van f en de lijn $y = x$.
We zeggen dat de functie f een **inverse** heeft. De **inverse functie** van een functie f noteren we met f^{inv}.



figuur 4.9

Functies f en g met de eigenschap dat hun grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y = x$ zijn elkaars inverse.
Notatie: $g = f^{\text{inv}}$ en $f = g^{\text{inv}}$.

Ook de functie $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ heeft een inverse. In de figuur hiernaast zijn de grafiek van f, de grafiek van f^{inv} en de lijn $y = x$ getekend.
Om het functievoorschrift van f^{inv} op te stellen, kun je als volgt te werk gaan.
Verwissel in $y = \frac{1}{2}x + 1$ de variabelen x en y.
Maak in de verkregen vorm de variabele y vrij.



figuur 4.10

Verwisselen van x en y in $y = \frac{1}{2}x + 1$ geeft $x = \frac{1}{2}y + 1$.
Vrijmaken van y bij $x = \frac{1}{2}y + 1$ geeft $\frac{1}{2}y = x - 1$,
dus $y = 2x - 2$.
De inverse van $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ is $f^{\text{inv}}(x) = 2x - 2$.

Voorbeeld
Bewijs dat de functie $g(x) = \dfrac{2 - x}{x - 5}$ de inverse is van de functie $f(x) = 5 - \dfrac{3}{x + 1}$.

Uitwerking
Voor f geldt $y = 5 - \dfrac{3}{x + 1}$, dus voor f^{inv} geldt $x = 5 - \dfrac{3}{y + 1}$.

$x = 5 - \dfrac{3}{y + 1}$ geeft $x(y + 1) = 5(y + 1) - 3$

$$\begin{aligned} xy + x &= 5y + 5 - 3 \\ xy - 5y &= 2 - x \\ y(x - 5) &= 2 - x \\ y &= \frac{2 - x}{x - 5} \end{aligned}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x) = \dfrac{2 - x}{x - 5}$ en er geldt inderdaad dat $g(x) = f^{\text{inv}}(x)$.

73 Stel het functievoorschrift op van de inverse van de volgende functies.

a $f(x) = \dfrac{2x}{x + 3}$ **b** $f(x) = \dfrac{3x - 1}{4x + 5}$ **c** $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

74
a Bewijs dat de functie $g(x) = \dfrac{2 - 2x}{x - 3}$ de inverse is van de functie $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x + 2}$.
b Bewijs dat de functie $k(x) = 5 + \dfrac{x}{x + 1}$ de inverse is van de functie $h(x) = \dfrac{5 - x}{x - 6}$.

75 Hieronder staan twee beweringen waarvan er één niet waar is.
Onderzoek welke bewering dat is.

Bewering 1
Als f en f^{inv} verschillende functies zijn en de punten (p, q) en (q, p) beide op de grafiek van f liggen, dan zijn de punten (p, q) en (q, p) snijpunten van de grafieken van f en f^{inv}.

Bewering 2
Om de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van de functies f en f^{inv} te berekenen, is het voldoende om de vergelijking $f(x) = x$ of de vergelijking $f^{\text{inv}}(x) = x$ op te lossen.

76 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+4}$.
De grafiek van f snijdt de grafiek van f^{inv} in de punten A en B.
Bereken exact de coördinaten van A en B.

A77 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{ax-2}{2x-5}$.
Bereken algebraïsch voor welke a

a de functie $g(x) = 2\frac{1}{2} + \dfrac{4}{x-2}$ de inverse is van f

b de grafieken van f en f^{inv} geen gemeenschappelijke punten op de lijn $y = x$ hebben.

A78 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+1}$.
Bereken voor welke a en b de grafieken van f en f^{inv} elkaar snijden in de punten A en B met $x_A = 3$ en $x_B = 5$.

Terugblik

Herleiden

Bij herleiden kun je gebruik maken van de merkwaardige producten. Zo is
$\frac{x^8-1}{x^2-1}=\frac{(x^4+1)(x^4-1)}{x^2-1}=\frac{(x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1}=$
$(x^4+1)(x^2+1)$ mits $x \neq 1 \wedge x \neq -1$.

$$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2$$
$$A^2-2AB+B^2=(A-B)^2$$
$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

Breuken herleiden

Om breuken op te tellen maak je ze gelijknamig.

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x(x+1)}+\frac{3x}{x(x+1)}=\frac{2x+2+3x}{x(x+1)}=\frac{5x+2}{x(x+1)}$$

$$2+\frac{3}{x+1}=\frac{2(x+1)}{x+1}+\frac{3}{x+1}=\frac{2x+2+3}{x+1}=\frac{2x+5}{x+1}$$

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+BC}{BD}$$
$$\frac{A}{B}+C=\frac{A+BC}{B}$$

Bij delingen met breuken gebruik je de regels hiernaast.

$$\frac{x-2}{\left(\frac{x}{x+1}\right)}=\frac{(x-2)(x+1)}{x}=\frac{x^2-x-2}{x} \text{ mits } x \neq -1$$

Uitdelen bij $\frac{x^2-2}{x}$ geeft $\frac{x^2-2}{x}=\frac{x^2}{x}-\frac{2}{x}=x-\frac{2}{x}$.

$$\frac{A}{\left(\frac{B}{C}\right)}=\frac{AC}{B} \text{ mits } C \neq 0$$

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{C}=\frac{A}{BC}$$

Functie en inverse functie

Functies f en g met de eigenschap dat hun grafieken elkaars spiegelbeeld zijn in de lijn $y=x$, zijn elkaars inverse. Notatie: $g=f^{\text{inv}}$ en $f=g^{\text{inv}}$.

Om het functievoorschrift van de inverse functie van $f(x)=\frac{3x+15}{4x-1}$ op te stellen, verwissel je de x en y in $y=\frac{3x+15}{4x-1}$ en maak je y vrij.

Je krijgt $x=\frac{3y+15}{4y-1}$

$$x(4y-1)=3y+15$$
$$4xy-x=3y+15$$
$$4xy-3y=x+15$$
$$y(4x-3)=x+15$$
$$y=\frac{x+15}{4x-3}$$

Dus $f^{\text{inv}}(x)=\frac{x+15}{4x-3}$.

Eindopdracht Motorboten, vrachtschepen en drijfhout

Het kost een motorboot 4 uur om met de stroom mee een rivier af te varen van A naar B. Het kost 6 uur om tegen de stroom in terug te varen van B naar A.

- Hoeveel uur duurt het om een houten plank ongehinderd van A naar B te laten drijven?

Een motorboot beweegt ten opzichte van het water met een snelheid van 25 km/uur. Hij vaart van Arnhem naar Zwolle met de stroom mee. Op een bepaald moment heeft hij 42% van de afstand afgelegd. Vanaf dat punt kost het evenveel tijd om door te varen naar Zwolle als om terug te varen naar Arnhem.

- Bereken de stroomsnelheid van het water.

Aan een meer liggen de havens A en B. Een vrachtschip vertrekt om 9:00 uur uit A op weg naar B. Om 13:00 uur vertrekt uit B een motorboot op weg naar A. De schepen varen met constante snelheid langs dezelfde route. Om 15:00 uur passeren de schepen elkaar. De motorboot arriveert in A een uur nadat het vrachtschip in B is aangekomen.

- Hoe laat kwam het vrachtschip aan in B?

Twee boten varen beide met een constante snelheid eenmaal heen en weer tussen de havens A en B. Ze vertrekken op hetzelfde moment, de ene uit A en de andere uit B. Op de heenreis passeren ze elkaar op 9 kilometer van de haven A. Beide boten blijven één uur in de andere haven voor ze terugkeren. Op hun terugweg passeren ze elkaar op 5 kilometer van haven B.

- Hoeveel kilometer liggen de havens uit elkaar?

Diagnostische toets

4.1 Stelsels vergelijkingen

1 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x + 3y = 23 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} 4x + 5y = 27 \\ -2x + 3y = 25 \end{cases}$ **c** $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$

2 Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt S van de lijnen k: $3x - 2y = 14$ en l: $2x + 5y = 3$.

3 De parabool $y = ax^2 + bx$ gaat door de punten $(-6, 18)$ en $(30, -450)$. Stel de formule op van de parabool.

4 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 = 5 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$ **b** $\begin{cases} xy = -6 \\ x + 4y = 2 \end{cases}$

4.2 Hogeregraadsvergelijkingen

5 Bereken exact de oplossingen.

a $3x^3 + 5 = 86$
b $5x^4 - 6 = 9$
c $2x^3 + 19 = 5$
d $\frac{1}{2}(x+2)^4 = \frac{1}{32}$
e $100 - (2x+1)^5 = 68$
f $(2x+4)^3 = 10$

6 Los algebraïsch op.

a $x^3 = x^2 + 20x$
b $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$
c $x^8 + x^4 = 42$
d $5x^4 + 1 = 6x^2$

7 Los algebraïsch op.

a $|2x^3 - 5| = 49$
b $|x^2 - 4| \geq 21$

4.3 Regels voor het oplossen van vergelijkingen

8 Los exact op.

a $(x^2 - 6)(x^2 - 2x) = 0$
b $(2x^2 - 1)^2 = (6x + 1)^2$
c $x(x^2 - 1) = 4(x^2 - 1)$
d $(x^3 - 9x)(x^2 - 3) = x^3 - 9x$

9 Los algebraïsch op.

a $\sqrt{3x+5} + 1 = 5$
b $3x = 5\sqrt{x+4}$
c $x = \sqrt{x} + 6$
d $2x + 3\sqrt{x} = 2$

10 Bereken exact de oplossingen.

a $\dfrac{x^2-5x+6}{2x+4}=0$

b $\dfrac{x^2-4}{2x+1}=\dfrac{x^2-4}{x-4}$

c $\dfrac{2x-1}{x+1}=\dfrac{4x+1}{5x-1}$

d $\dfrac{2x^2-4}{x+5}=1\frac{3}{4}$

4.4 Herleidingen en inverse functies

11 Herleid.

a $\dfrac{x^4-16}{x^3-4x}$

b $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^4-1}$

12 Herleid.

a $y=2x-\dfrac{x-1}{x-2}$

b $y=\dfrac{3}{x}\left(2-\dfrac{x}{x-1}\right)$

c $y=\dfrac{2x+\dfrac{x}{x-1}}{x+1}$

d $y=\dfrac{\dfrac{2}{x+1}-3}{4-\dfrac{x}{x+1}}$

13 Deel uit.

a $N=\dfrac{4x^2-50}{2x}$

b $B=\dfrac{6p^2-3p+4}{3p}$

14 **a** Maak x vrij bij de formule $y=\dfrac{2x-3}{x+5}$.

b Druk x uit in y bij de formule $y=3+\dfrac{2x}{x-1}$.

15 Stel het functievoorschrift op van de inverse van de volgende functies.

a $f(x)=\dfrac{2x-1}{5-x}$

b $g(x)=2-\dfrac{3}{x-4}$

Gemengde opgaven

1 Functies en grafieken

1 Gegeven zijn de lijnen k: $y = \frac{1}{3}ax + b$ en l: $y = -3x + 2b$.

a Voor welke a en b snijden k en l elkaar in het punt $A(-1, 2)$?

b De lijn k snijdt de x-as in het punt $B(2, 0)$ en de lijn l snijdt de y-as in het punt $C(0, 4)$.
Bereken de coördinaten van het snijpunt S van k en l.

c Voor welke a en b zijn k en l evenwijdig en is de afstand tussen de snijpunten van k en l met de x-as gelijk aan 2?

2 Harm en Marc rijden op hun racefiets van Noord-Holland naar Friesland over de 30 kilometer lange Afsluitdijk. Harm vertrekt om 8:00 uur en rijdt met een constante snelheid van 30 km/uur. Marc vertrekt 5 minuten na Harm en rijdt met een constante snelheid van 33 km/uur. Voor Harm geldt de formule $s = \frac{1}{2}t$. Hierin is s de afgelegde afstand in km en t de tijd in minuten met $t = 0$ om 8:00 uur.

a Stel de formule op die voor Marc geldt en bereken hoe laat Harm door Marc wordt ingehaald.

b Gerrit vertrekt om 8:00 uur op zijn pedelec uit Friesland richting Noord-Holland over de Afsluitdijk. Gerrit rijdt 42 km/uur.
Hoe laat komen Harm en Gerrit elkaar tegen?

3 **a** De top van de grafiek van $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + a$ ligt op de lijn k: $y = ax - 3$.
Bereken a.

b Een van de snijpunten van de grafiek van $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - bx$ met de x-as ligt op de lijn l: $y = bx - 18$.
Bereken b.

c Het snijpunt van de lijn m: $y = 2x + c$ met de x-as ligt op de grafiek van $h(x) = 3x^2 - cx - 10$.
Bereken c.

4 Bereken exact de oplossingen.

a $7x^2 = 5x$

b $2x^2 + x = 3$

c $(x + 2)(x - 6) = 9$

d $(x - 3)^2 - (x + 1) = x^2 - 1$

e $(2x - 3)^2 = 36$

f $4 - (x - 2)^2 = 7x - 3$

5 Voor elke waarde van p is de functie f_p gegeven door
$f_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - px + 9$.
Bereken algebraïsch voor welke p

a de functie f_p een negatief minimum heeft
b de top van de grafiek van f_p op de lijn k: $y = -3x + 2$ ligt.

Er is een kromme waarop alle toppen van de grafieken van f_p liggen.

c Stel de formule op van deze kromme.

6 Bereken algebraïsch voor welke p de vergelijking

a $x^2 - 2px + 16 = 0$ één oplossing heeft
b $px^2 - px + 3 = 0$ geen oplossingen heeft
c $px^2 + 6x + 3p = 0$ twee oplossingen heeft.

Van de vergelijking $x^2 + px - 6p^2 = 0$ is $x = 6$ een oplossing.

d Bereken p en de andere oplossing.

7 Gegeven is de functie $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2\frac{1}{2}$. De grafiek van f heeft top T, snijdt de x-as in de punten A en B en de y-as in het punt C.

a Teken de grafiek van f.
b Geef het bereik en de extreme waarde van f.
c Stel de formule van de lijn CT op.
d Bereken de oppervlakte van driehoek ABT.
e Bereken exact de waarde van a waarvoor $B_f = [-4, 2]$ bij $D_f = [a, 5]$.

8 Gegeven zijn de functies $f(x) = 5 - \left|1\frac{1}{2}x - 3\right|$ en $g(x) = x - 1 + \left|2x - 3\right|$.

a Teken de grafieken van f en g in één figuur.
b Bereken algebraïsch de coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.
c De lijn $y = 3$ snijdt de grafieken van f en g van links naar rechts in de punten A, B, C en D.
Onderzoek algebraïsch welke van de lijnstukken AB, BC of CD de kleinste lengte heeft.

9 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 7$. De functie heeft twee extreme waarden.

a Bereken B_f in het geval $D_f = [-1, 2]$.
b Bereken B_f in het geval $D_f = [-5, -2]$.

10 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 24x - 10$. De grafiek van f heeft drie toppen, die we van links naar rechts A, B en C noemen.

a Bereken de coördinaten van de drie toppen.
b Voor welke waarden van a heeft de vergelijking $f(x) = a$ drie oplossingen?
c De lijn k gaat door B en C. Behalve in B en C snijdt k de grafiek ook nog in de punten D en E.
Bereken de coördinaten van D en E. Rond af op twee decimalen.

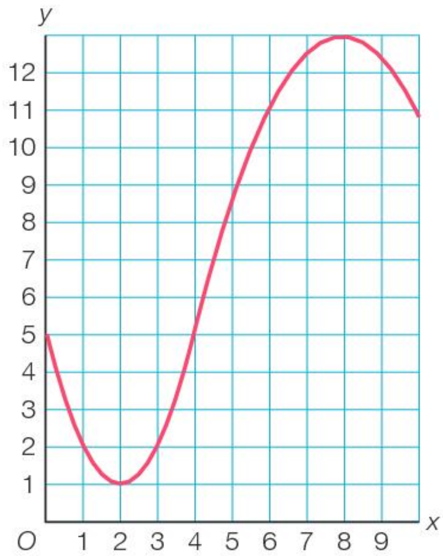
11 Gegeven zijn de functies $f(x) = 0{,}1x^3 - 0{,}2x^2 - 2x + 2$ en $g(x) = 0{,}2x^2 - 3$.
Los op. Rond af op twee decimalen.

a $f(x) < g(x)$
b $f(x) > 0$
c $|g(x)| < 2$
d $f(x) \cdot g(x) > 0$

2 De afgeleide functie

12 [▸ WERKBLAD] Gegeven is de grafiek in de figuur hiernaast.

a Welke soorten van stijgen en dalen kun je herkennen? Geef de bijbehorende intervallen.
b Geef twee intervallen $[p, 10]$ waarop de gemiddelde verandering gelijk is aan 1.
c Geef het kleinste interval $[a, b]$ met a en b gehele getallen waarop het differentiequotiënt gelijk is aan 0.
d In de punten A en B van de grafiek is de helling van de grafiek gelijk aan 2.
Geef de coördinaten van A en B.
e Onderzoek of er een punt op de grafiek ligt waarin de helling van de grafiek gelijk is aan −7.
f Op de grafiek liggen, van links naar rechts, de punten C, D en E waarbij de hellingen van de lijnen CD en DE gelijk zijn aan 1 en de helling van de grafiek in E gelijk is aan 0.
Geef de coördinaten van C, D en E.



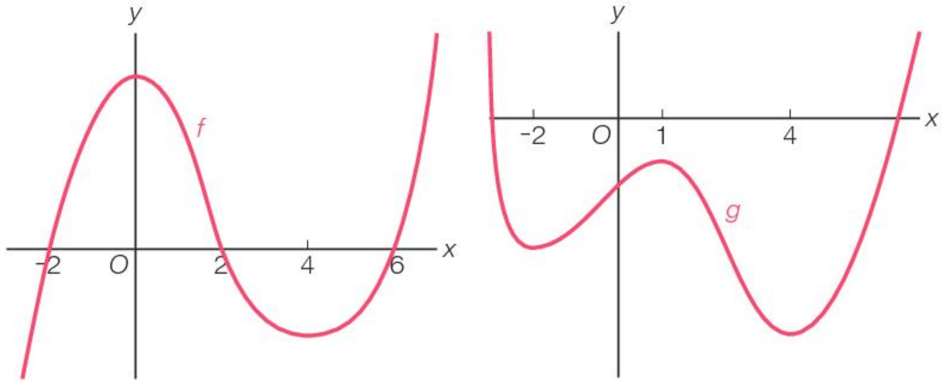
figuur G.1

13 Van de functie $f(x) = ax^2 + bx + c$ is het volgende bekend:

- op $[0, 4]$ is het differentiequotiënt gelijk aan 2
- op $[2, 3]$ is het differentiequotiënt gelijk aan 4.

a Bereken het differentiequotiënt op $[1, 5]$.
b Voor welke waarde van c is het differentiequotiënt op $[0, c]$ gelijk aan c?

14 [▸ WERKBLAD] In figuur G.2 zie je de grafieken van de functies f en g.



figuur G.2

a Schets de hellinggrafieken van f en g.

b De grafiek van f is de hellinggrafiek van de functie h.
Schets een mogelijke grafiek van h.

15 Een mountainbiker rijdt in heuvelachtig gebied. De tijd-afstandformule is $s = \dfrac{500t^2}{t^2 + 400}$. Hierin is s de afgelegde afstand in meter na t seconden met $0 \leq t \leq 50$.

a Bereken in km/uur de snelheid van de mountainbiker op $t = 15$ en op $t = 30$.

Na 50 seconden verandert de snelheid niet meer.

b Hoeveel meter heeft de mountainbiker na 1 minuut afgelegd?

16 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{5x + 6}{\sqrt{2x + 9}}$.

a De lijn l raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = -4$.
Stel de formule van l op.

b De grafiek van f snijdt de y-as in het punt B.
Stel de formule op van de raaklijn k in B. Rond de richtingscoëfficiënt af op twee decimalen.

c De lijn m raakt de grafiek van f in het punt C met $x_C = 8$.
Bereken in twee decimalen nauwkeurig de x-coördinaat van het snijpunt van m met de x-as.

17 Bereken de afgeleide.

a $f(x) = -x(2x - 7)$

b $f(x) = (x^2 - 1)(x - 1)$

c $f(x) = \dfrac{2x - 1}{5 - 2x}$

d $f(x) = 7 - \dfrac{x^2 + 8x}{16}$

e $f(x) = x(3x + 2)^2$

f $f(x) = 8 - (x - 1)^2$

g $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1} + x^4$

h $f(x) = 3x^2 - \dfrac{4x + 3}{2x - 1}$

18 Gegeven is de functie $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

a De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A.
De lijn k raakt de grafiek van f in A.
Stel langs algebraïsche weg de formule van k op.

b Bereken algebraïsch de coördinaten van de punten van de grafiek waar de raaklijn horizontaal is.

c In de punten B en C op de grafiek van f zijn de raaklijnen evenwijdig met de lijn l: $y = 4x + 10$.
Bereken algebraïsch de coördinaten van B en C.

19 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 + 2)(1 - x)$.
De lijn k raakt de grafiek van f in het punt A met $x_A = 2$.

a Stel langs algebraïsche weg de formule van k op.

b Op de grafiek van f ligt het punt B waarin de raaklijn evenwijdig is met k.
Bereken algebraïsch de x-coördinaat van B.

20 Gegeven is de functie $f(x) = (x^2 - 9)(x + p)$.
Op de grafiek van f ligt het punt A met $x_A = -2$.
De raaklijn k in A is evenwijdig met de lijn l: $y = 7x - 5$.
De lijn k snijdt de grafiek van f in het punt B.
Bereken de coördinaten van B.

21 Een motor trekt op. Gedurende de eerste acht seconden is de afgelegde afstand s in meter te benaderen door de formule $s = 0{,}06t^3 + 1{,}2t^2$. Na acht seconden verandert de snelheid niet meer.

a Bereken algebraïsch de snelheid na vier en na zes seconden.

b Bereken na hoeveel seconden de snelheid gelijk is aan 100 km/uur.
Rond af op twee decimalen.

c Na hoeveel seconden heeft de motor 300 meter afgelegd?

22 Gegeven is de functie $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x + 3}$.

a De grafiek van f snijdt de y-as in het punt A.
Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in A.

b De grafiek van f snijdt de x-as in de punten B en C met $x_B = -2$ en $x_C = 1$. De lijnen l en m zijn de raaklijnen in B en C.
Bereken algebraïsch de coördinaten van het snijpunt van l en m.

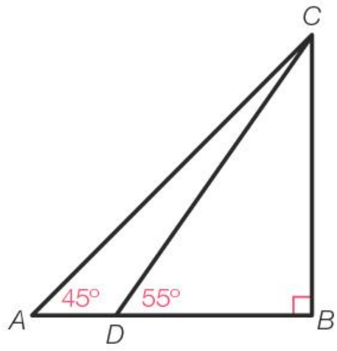
23 Gegeven is de functie $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

a Stel langs algebraïsche weg de formule op van de raaklijn k in het punt A met $x_A = -2$.

b De lijn l raakt de grafiek van f in het punt B met $x_B = -1$ en de lijn m raakt de grafiek van f in het punt C met $x_C = 3$.
Onderzoek langs algebraïsche weg of de lijnen l en m evenwijdig zijn.

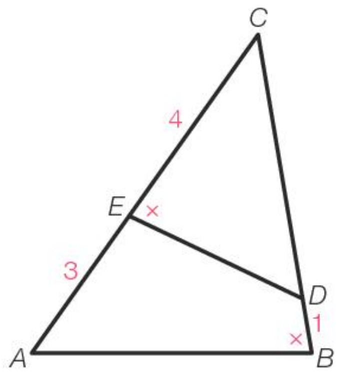
3 Meetkunde

24 Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur G.3 met $\angle A = 45°$. Het punt D ligt op AB waarbij $\angle BDC = 55°$. Verder is $BD = AD + 2$.
Bereken AB en CD. Rond af op twee decimalen.



figuur G.3

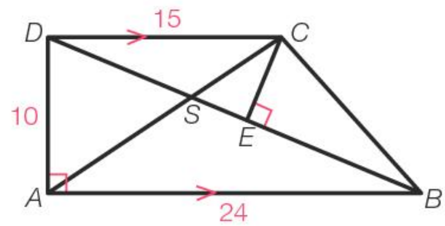
25 Gegeven is driehoek ABC met $AC = 7$. De punten D en E liggen zo op BC en AC dat $AE = 3$, $BD = 1$ en $\angle ABC = \angle CED$.
Zie figuur G.4.
Bereken CD exact.



figuur G.4

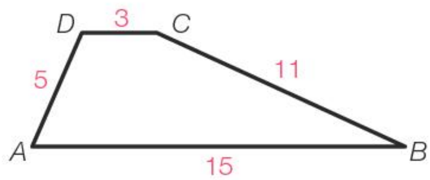
26 Gegeven is het rechthoekig trapezium $ABCD$ in figuur G.5.
$AB = 24$, $AD = 10$ en $CD = 15$. Het punt E ligt op BD waarbij $\angle CEB = 90°$. S is het snijpunt van AC en BD.

a Bereken CE.
b Bewijs dat $\angle CAD = \angle ASD$.



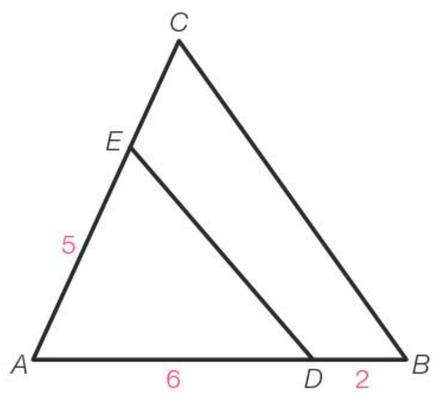
figuur G.5

27 Gegeven is het trapezium $ABCD$ in figuur G.6.
$AB = 15$, $BC = 11$, $CD = 3$ en $AD = 5$.
Bereken exact de oppervlakte van het trapezium.



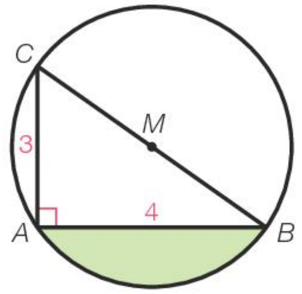
figuur G.6

28 Gegeven is driehoek ABC met $AB = 8$. Op de zijden AB en AC liggen de punten D en E waarbij $AD = 6$ en $AE = 5$. Zie de figuur hiernaast.
Verder is gegeven dat de oppervlakte van driehoek ADE gelijk is aan de oppervlakte van vierhoek $BCED$.
Bereken CE.



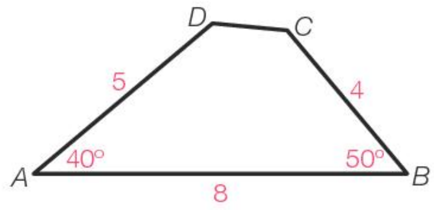
figuur G.7

29 Gegeven is de rechthoekige driehoek ABC in figuur G.8. $\angle A = 90°$, $AB = 4$ en $AC = 3$. Het midden M van BC is het middelpunt van de cirkel die door A, B en C gaat.
Bereken de oppervlakte van het groene gebied.
Rond af op twee decimalen.



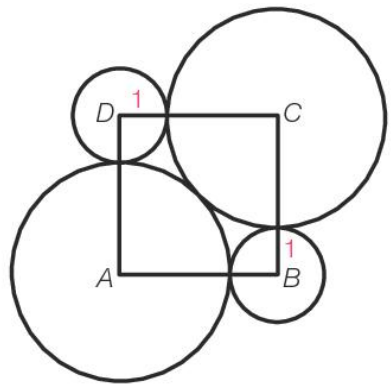
figuur G.8

30 Gegeven is vierhoek $ABCD$ in de figuur hiernaast.
$\angle A = 40°$, $\angle B = 50°$, $AB = 8$, $AD = 5$ en $BC = 4$.
Bereken CD. Rond af op twee decimalen.



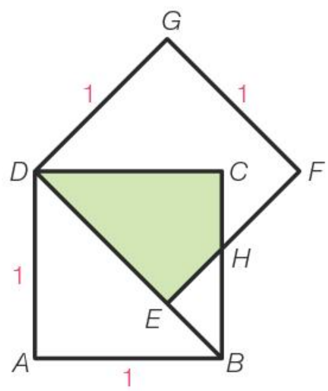
figuur G.9

31 **a** Gegeven is vierkant $ABCD$. De hoekpunten B en D zijn de middelpunten van de cirkels met straal 1. De cirkels met de middelpunten A en C raken elkaar en de cirkels met straal 1. Zie figuur G.10.
Bereken exact de straal van de cirkels met de middelpunten A en C.



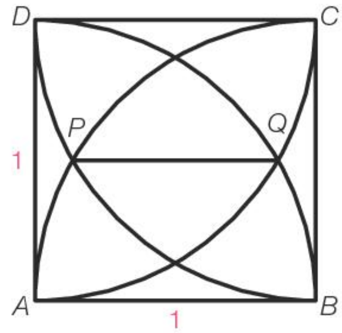
figuur G.10

b Gegeven zijn de vierkanten $ABCD$ en $DEFG$ met zijde 1. Het punt E ligt op diagonaal BD. Zie figuur G.11.
Bereken exact de oppervlakte van vierhoek $DEHC$.



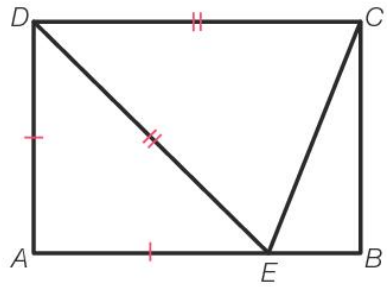
figuur G.11

c Gegeven is vierkant $ABCD$ met zijde 1. Zie figuur G.12. Er zijn vier kwartcirkels getekend met als middelpunt de hoekpunten van het vierkant en straal 1. Twee van de snijpunten die zo ontstaan, zijn P en Q.
Bereken exact de lengte van het lijnstuk PQ.



figuur G.12

32 Van driehoek ABC met omtrek 10 is $AB = AC + 4$ en $\angle BAC = 120°$.
Bereken de oppervlakte van driehoek ABC. Rond af op twee decimalen.

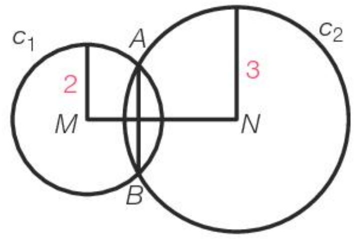


figuur G.13

33 Zie figuur G.13 met rechthoek $ABCD$.
Bereken exact $\tan(22\frac{1}{2}°)$.

34 Cirkel c_1 met middelpunt M en straal 2 snijdt cirkel c_2 met middelpunt N en straal 3 in de punten A en B. De afstand tussen M en N is 4. Zie figuur G.14.

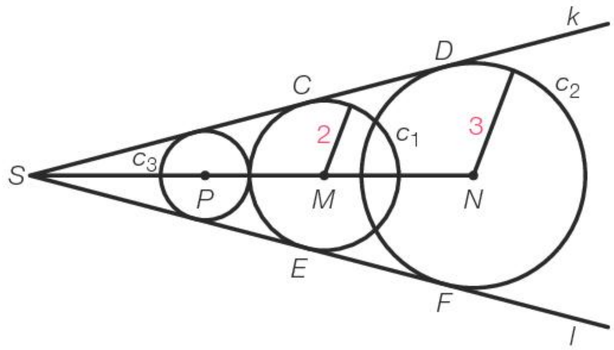
a Bereken exact de lengte van het lijnstuk AB.



figuur G.14 $MN = 4$

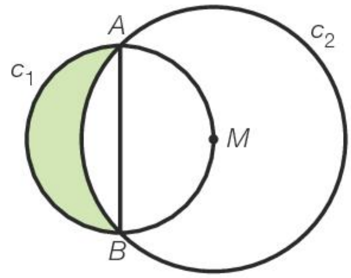
De lijn k raakt c_1 in het punt C en c_2 in het punt D.
De lijn l raakt c_1 in het punt E en c_2 in het punt F.
Het punt S is het snijpunt van k en l.
Cirkel c_3 raakt c_1 en de lijnen k en l. Zie figuur G.15.

b Bereken de straal van c_3.



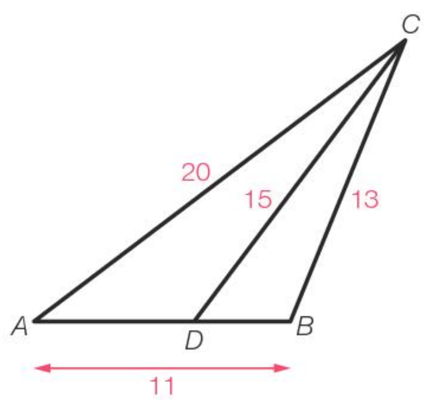
figuur G.15 $MN = 4$

35 Het lijnstuk AB is een middellijn van cirkel c_1. Het middelpunt M van cirkel c_2 ligt op c_1. Cirkel c_2 gaat door A en B.
Bewijs dat de oppervlakte van het groene gebied gelijk is aan de oppervlakte van driehoek ABM.



figuur G.16

36 Gegeven is $\triangle ABC$ met $AB = 11$, $AC = 20$ en $BC = 13$.
Het punt D ligt op AB waarbij $CD = 15$. Zie figuur G.17.
Bereken AD.



figuur G.17

4 Vergelijkingen en herleidingen

37 Los algebraïsch op.

a $\begin{cases} 2x + 3y = 58 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases}$

b $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$

c $\begin{cases} 0{,}4x - 0{,}32y = 2 \\ 0{,}6x - 0{,}28y = 5 \end{cases}$

d $\begin{cases} (2x - 1)^2 + (3y - 1)^2 = 73 \\ x + 5y = 17 \end{cases}$

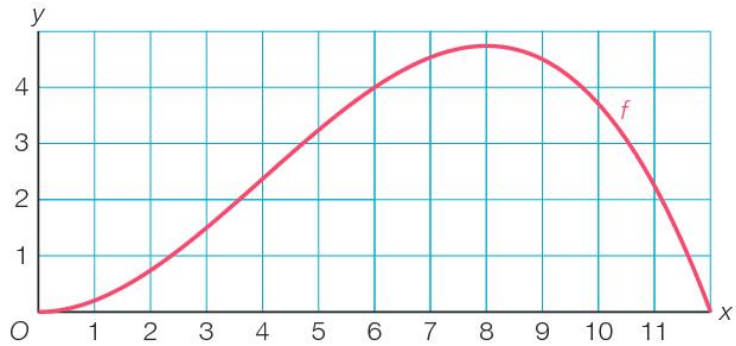
38 In de figuur hiernaast zie je de grafiek van de functie f.
Het functievoorschrift van f is van de vorm $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a Licht toe dat $d = 0$.

Om c te berekenen, gebruik je dat de helling van de grafiek in de oorsprong gelijk is aan 0.

b Toon aan dat $c = 0$.

c Bereken a en b.



figuur G.18

39 Finn heeft een speelgoedtrein met houten rails. Hij heeft stukken rails van 7, 15 en 22 cm.
De totale lengte van de stukken van 7 cm en 15 cm is 95 cm.
De totale lengte van de stukken van 7 cm en 22 cm is 189 cm.
De totale lengte van de stukken van 15 cm en 22 cm is 214 cm.
Hoeveel stukken rail van 22 cm heeft Finn?

40 Bereken exact de oplossingen.

a $17 - (2x - 1)^4 = 1$

b $x^6 - 6x^3 + 5 = 0$

c $10x^4 = 17x^2 + 657$

d $x^3 + 5x \geq 6x^2$

e $(2x - 1)^4 - 5(2x - 1)^2 + 4 = 0$

f $x^3 - 3x\sqrt{x} - 108 = 0$

41 Los algebraïsch op.

a $x^5 - 16x^3 + 28x = 0$

b $x^4 < x^2 + 12$

c $\left| x^4 - 3x^2 \right| \leq x^2$

d $6x^5 + 10x^2 \cdot \sqrt{x} - 464 = 0$

42 Vroeger hadden geleerden geen problemen met het optellen van een inhoud bij een oppervlakte of een lengte. Zo was van een kubus met ribbe 2 de som van de inhoud, de oppervlakte en de ribben gelijk aan 56.

a Laat met een berekening zien hoe men aan deze som kwam.

Van een kubus is de som van de inhoud en drie keer de oppervlakte gelijk aan 144 ribben.

b Bereken exact de ribbe van deze kubus.

Van een andere kubus is het product van de inhoud en de som van de oppervlakte en de ribben gelijk aan het kwadraat van de oppervlakte.

c Bereken exact de ribbe van deze kubus.

43 Bereken exact de oplossingen.

a $(2x^2 - 1)^2 = x^2$

b $\sqrt{2 - 2x} + 2x = 0$

c $\dfrac{2x + 4}{x} = \dfrac{12}{x + 1}$

d $\sqrt{3x - 2} + 2 = x$

e $(2x - 3)(x^2 - 3) + 3 = 2x$

f $\dfrac{x^2 - 9}{2x + 3} = \dfrac{x^2 - 9}{x + 4}$

44 Bereken exact de oplossingen.

a $(x^3 - 2x + 1)(2x + 1) = 2x + 1$

b $\dfrac{x^3}{x + 2} = \dfrac{4x}{x + 2}$

c $\dfrac{3(x^3 - 5) + 21}{x^3 + 1} = 0$

d $\sqrt{x^2 + 2x} + x = 6$

e $x^3 - 26x\sqrt{x} = 27$

f $\dfrac{x^2 - 1}{2x + 2} = 5x$

45 Herleid.

a $y = \dfrac{x^4 - x^2}{x - 1}$

b $y = \dfrac{15x}{x + 2} - 2x$

c $y = \dfrac{10 - \dfrac{2x}{x + 3}}{5 + \dfrac{2}{x + 3}}$

d $N = \dfrac{3t^3 + 3t^2 - 6t}{t^2 + 2t}$

e $K = \dfrac{2a}{a + 2}\left(\dfrac{a - 1}{2a} - \dfrac{a + 2}{a^2}\right)$

f $P = \dfrac{\dfrac{q^2}{q^2 + 1} - 2}{\dfrac{q}{q^2 + 1} - 2q}$

46 **a** Deel uit bij $T = \dfrac{(2t-1)(t+2)}{2t^2}$.

b Werk bij $B = 12a - 6 \cdot \dfrac{\dfrac{a}{a^2+1} - 2}{5a}$ de breuk uit de teller weg.

c Gegeven zijn de formules $K = \dfrac{3y-2}{2y-1}$ en $y = \dfrac{4x}{x-1}$.

Schrijf de formule van K in de vorm $K = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

47 **a** Gegeven is functie $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$.

Bereken exact de oplossing van $f^{\text{inv}}(x) = 3$.

b Gegeven is functie $g(x) = 1 + \dfrac{3}{x-3}$.

Los exact op $g^{\text{inv}}(x) = x^2$.

c Gegeven is de functie $h(x) = a + \dfrac{3x-1}{2x+1}$.

Bereken algebraïsch voor welke a de functie $k(x) = 2 - \dfrac{5x-25}{2x-11}$ de inverse is van h.

48 **a** Bereken exact voor welke p de vergelijking $px^3 + 2px^2 + x^2 + 2\frac{1}{4}x = 0$ drie oplossingen heeft.

b Bereken exact voor welke p de vergelijking $2px^4 - px^3 + 5x^3 + 2x^2 = 0$ precies één oplossing heeft.

49 Bereken exact de x-coördinaten van de punten op de grafiek van $f(x) = \dfrac{10x}{x^2+1}$ waarin de richtingscoëfficiënt van de raaklijn gelijk is aan $-\frac{4}{5}$.

Overzicht GR-modules

Module

Berekeningen op het basisscherm • Eenvoudige berekeningen met onder andere mintekens, haakjes en tussenstappen • De toets Ans en fouten verbeteren • Breuken invoeren, vermenigvuldigen en delen • Decimaal getal omzetten in breuk	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 14
Formules, grafieken en tabellen • Formules invoeren en grafieken plotten • Functiewaarden berekenen op het grafiekenscherm en op het basisscherm • Tabellen maken en de tabelinstelling veranderen	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 42
Toppen en snijpunten • Toppen en snijpunten van grafieken • Berekenen van nulpunten	vwo B deel 1 hoofdstuk 1 bladzijde 42
Helling • De richtingscoëfficiënt van een raaklijn	vwo B deel 1 hoofdstuk 2 bladzijde 66
Het gebruik van Ans en lettergeheugens • De toets Ans • Het gebruik van lettergeheugens	vwo B deel 1 hoofdstuk 3 bladzijde 100
Allerlei • Specifieke mogelijkheden van het merk/type GR	

Overzicht routes

1 Functies en grafieken

1.1 Lineaire functies

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
basis																		
midden																		
uitdagend																		

1.2 Tweedegraadsfuncties en tweedegraadsvergelijkingen

opgave	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
basis																	
midden																	
uitdagend																	

1.3 Werken met parameters

opgave	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
basis											
midden											
uitdagend											

47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58

1.4 Domein, bereik en modulusfuncties

opgave	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
basis											
midden											
uitdagend											

1.5 Grafisch-numeriek oplossen

opgave	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
basis											
midden											
uitdagend											

2 De afgeleide functie

2.1 Snelheden

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
⌑ basis																									
⊙ midden																									
✱ uitdagend																									

2.2 Raaklijnen en hellinggrafieken

opgave	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
⌑ basis																
⊙ midden																
✱ uitdagend																

2.3 Limiet en afgeleide

opgave	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
⌑ basis																	
⊙ midden																	
✱ uitdagend																	

2.4 Toepassingen van de afgeleide

opgave	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
⌑ basis																				
⊙ midden																				
✱ uitdagend																				

3 Meetkunde

3.1 Berekeningen in driehoeken

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
basis																						
midden																						
uitdagend																						

3.2 Lengte, omtrek en oppervlakte

opgave	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
basis													
midden													
uitdagend													

3.3 Rekenen met wortels

opgave	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
basis												
midden												
uitdagend												

3.4 Vergelijkingen in de meetkunde

opgave	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
basis																		
midden																		
uitdagend																		

3.5 De sinusregel en de cosinusregel

opgave	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83
basis																		
midden																		
uitdagend																		

4 Vergelijkingen en herleidingen

4.1 Stelsels vergelijkingen

opgave	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
⧠ basis																						
⊙ midden																						
∗ uitdagend																						

4.2 Hogeregraadsvergelijkingen

opgave	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
⧠ basis																		
⊙ midden																		
∗ uitdagend																		

4.3 Regels voor het oplossen van vergelijkingen

opgave	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
⧠ basis															
⊙ midden															
∗ uitdagend															

4.4 Herleidingen en inverse functies

opgave	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78
⧠ basis																							
⊙ midden																							
∗ uitdagend																							

Trefwoordenregister

Verantwoording

Illustraties: Haasart, Wim de Haas, Rhenen
Technisch tekenwerk: Integra Software Services
Beeldresearch: B en U International Picture Service, Amsterdam

Colofon
Omslagontwerp: InOntwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Lay-out: Integra Software Services

Foto's
iStock: p. 6-7, 13, 61, 140-141, 179 o
Gerrit de Jong, Middelburg: p. 17
Hollandse Hoogte, Den Haag: p. 25, 67, 94-95, 179 b
Shutterstock: p. 50-51, 182
ANP Foto, Den Haag: p. 53
Getty Images: p. 68 b
Folio 116v, vol 72, Galilean manuscripts, 1608: p. 68 m
Rijksmuseum, Amsterdam: p. 79, 89 b, o, 157 mb, m
Wikimedia Commons: p. 108, 157 o
Imageselect, Wassenaar: p. 157 b, mo
BRIO, www.brio.net: p. 190

Eventuele op- en aanmerkingen over deze of andere uitgaven kunt u richten aan: Noordhoff Uitgevers bv, Afdeling Voortgezet onderwijs, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen of via het contactformulier op www.mijnnoordhoff.nl.

0 / 19

ISBN 978-90-01-89178-7

LEERBOEK WISKUNDE B VWO DEEL 1

Bij dit boek hoort een digitale leeromgeving.
Als je de opdrachten online maakt, zie je direct wat er al goed gaat. Je krijgt daarbij handige tips, zodat je het de volgende keer beter doet.

Op basis van je resultaten krijg je bovendien opdrachten op jouw niveau. Dus wat moeilijker als het goed gaat of met meer hulp als je dat nodig hebt.
Met de oefentoetsen kun je je voorbereiden op het proefwerk.
Als je meer uitleg nodig hebt, zijn er ook nog handige uitlegvideo's.

Noordhoff Uitgevers

www.getalenruimte.noordhoff.nl

ISBN 978-90-01-89178-7